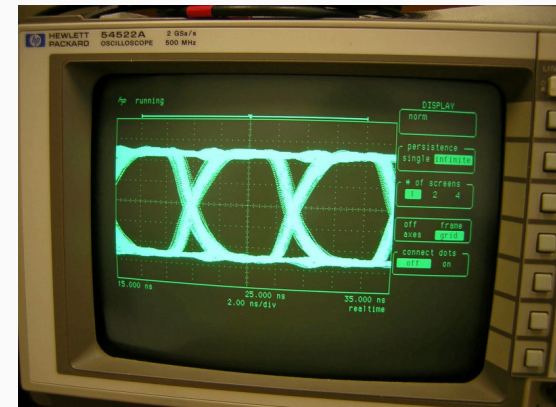


Sistemas de Comunicação

Densidade espectral de energia e de potência



Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

Instituto Federal de Santa Catarina

Sinais de energia

Energia de um sinal

A **energia** de um sinal real $x(t)$ é definida por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt.$$

Um sinal com $E_x < \infty$ é chamado de **sinal de energia**.

A energia é uma medida da “intensidade” do sinal ao longo de todo o tempo.

Exercício 1

Determine a energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A \text{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = Ae^{-t/T} u(t)$, onde $T > 0$.

Exercício 1

Determine a energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A \text{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = Ae^{-t/T} u(t)$, onde $T > 0$.

Resposta:

(a) $E_x = A^2T$.

(b) $E_x = A^2T/2$.

Teorema de Parseval

É possível calcular a energia de um sinal $x(t)$ no domínio da frequência:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

Esse resultado é conhecido como **teorema de Parseval**.

Demonstração do teorema de Parseval

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi tf} df \right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-j2\pi tf} df \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi tf} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Densidade espectral de energia

A **densidade espectral de energia** de um sinal de energia $x(t)$ é definida por

$$\Psi_x(f) = |X(f)|^2.$$

Esta definição é motivada pelo teorema de Parseval. Assim:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f) df.$$

Exercício 2

Determine a densidade espectral de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = Ae^{-t/T} u(t)$, onde $T > 0$.

Em seguida, verifique o teorema de Parseval.

Exercício 2

Determine a densidade espectral de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = A e^{-t/T} u(t)$, onde $T > 0$.

Em seguida, verifique o teorema de Parseval.

Resposta:

(a) $\Psi_x(f) = A^2 T^2 \operatorname{sinc}^2(Tf)$.

(b) $\Psi_x(f) = \frac{A^2 T^2}{1 + (2\pi T f)^2}$.

Autocorrelação temporal de energia

A **autocorrelação temporal de energia** de um sinal real de energia $x(t)$ é definida por

$$\psi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t - \tau) dt.$$

É uma medida da similaridade entre $x(t)$ e sua versão deslocada de τ .

Propriedades:

1. $\psi_x(\tau)$ é par.
2. $E_x = \psi_x(0)$.
3. $\psi_x(\tau) = x(\tau) \star x(-\tau)$.

A autocorrelação temporal de energia é a convolução do sinal com sua versão refletida no tempo.

Exercício 3

Determine a autocorrelação temporal de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A \text{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = Ae^{-t/T} u(t)$, onde $T > 0$.

Exercício 3

Determine a autocorrelação temporal de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A \text{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = Ae^{-t/T} u(t)$, onde $T > 0$.

Resposta:

(a) $\psi_x(\tau) = A^2 T \text{tri}(\tau/T)$.

(b) $\psi_x(\tau) = \frac{A^2 T}{2} e^{-|\tau|/T}$.

Teorema de Wiener–Khinchin para sinais de energia determinísticos

A autocorrelação temporal de energia $\psi_x(\tau)$ e a densidade espectral de energia $\Psi_x(f)$ são pares transformados de Fourier:

$$\Psi_x(f) = \mathcal{F}\{\psi_x(\tau)\}.$$

Teorema de Wiener–Khinchin para sinais de energia determinísticos

A autocorrelação temporal de energia $\psi_x(\tau)$ e a densidade espectral de energia $\Psi_x(f)$ são pares transformados de Fourier:

$$\Psi_x(f) = \mathcal{F}\{\psi_x(\tau)\}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\psi_x(\tau)\} &= \mathcal{F}\{x(\tau) \star x^*(-\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\{x(\tau)\}\mathcal{F}\{x^*(-\tau)\} \\ &= X(f)X^*(f) \\ &= |X(f)|^2 \\ &= \Psi_x(f). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 4

Verifique o teorema de Wiener–Khinchin para os sinais abaixo.

(a) $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = Ae^{-t/T} u(t)$, onde $T > 0$.

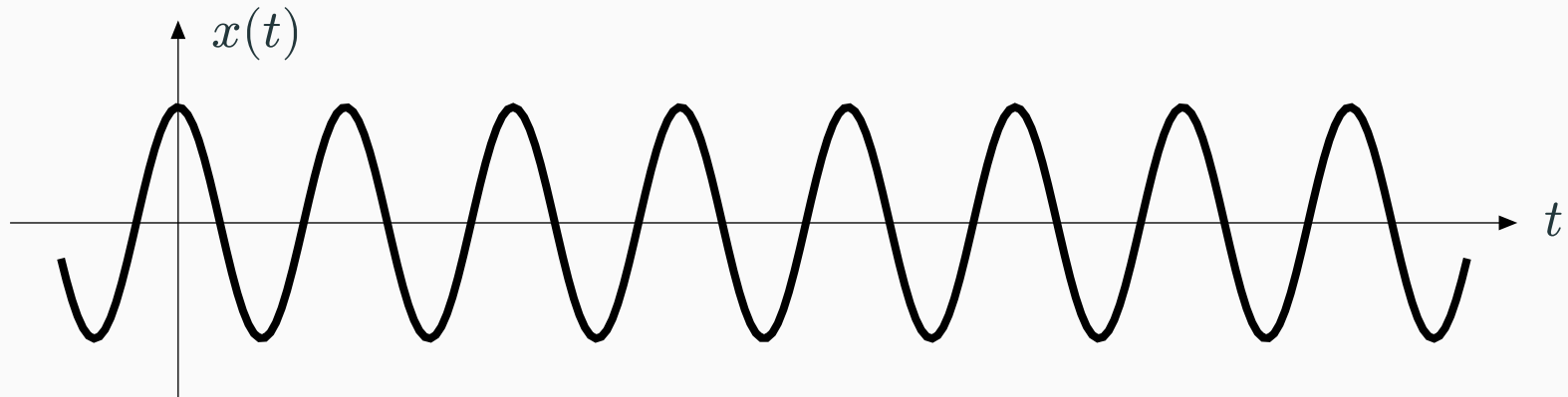
Sinais de potência

Sinais de potência

Para ter energia *finita*, um sinal deve ter duração limitada ou decair para 0 quando $t \rightarrow \pm\infty$.

No entanto, muitas vezes encontramos sinais que “persistem” indefinidamente. Exemplos:

- Um sinal periódico.



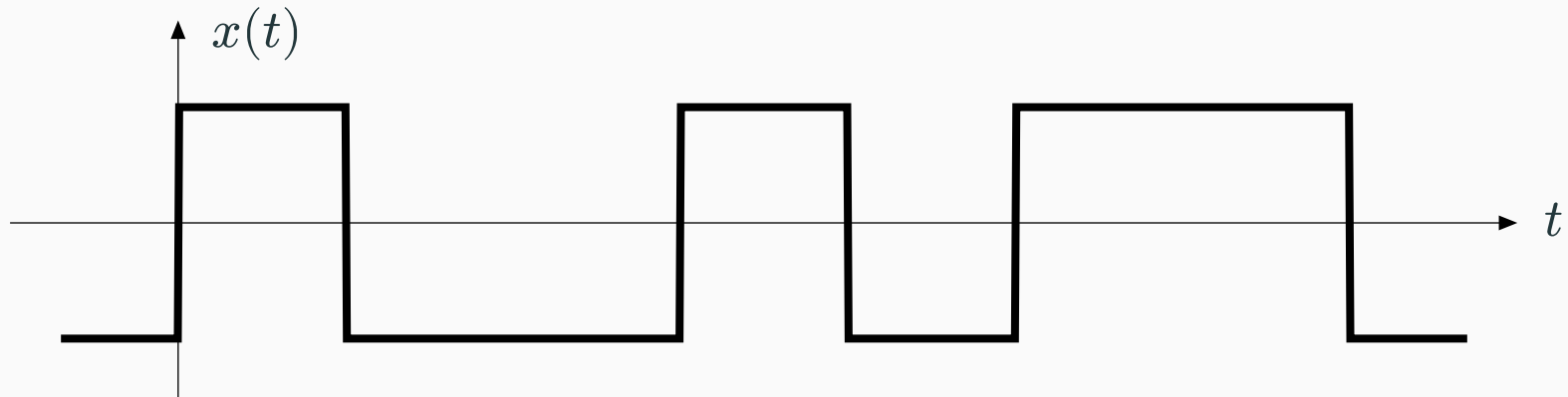
- Um sinal de comunicação transmitindo dados continuamente.

Sinais de potência

Para ter energia *finita*, um sinal deve ter duração limitada ou decair para 0 quando $t \rightarrow \pm\infty$.

No entanto, muitas vezes encontramos sinais que “persistem” indefinidamente. Exemplos:

- Um sinal periódico.
- Um sinal de comunicação transmitindo dados continuamente.



Sinais de potência

Para ter energia *finita*, um sinal deve ter duração limitada ou decair para 0 quando $t \rightarrow \pm\infty$.

No entanto, muitas vezes encontramos sinais que “persistem” indefinidamente. Exemplos:

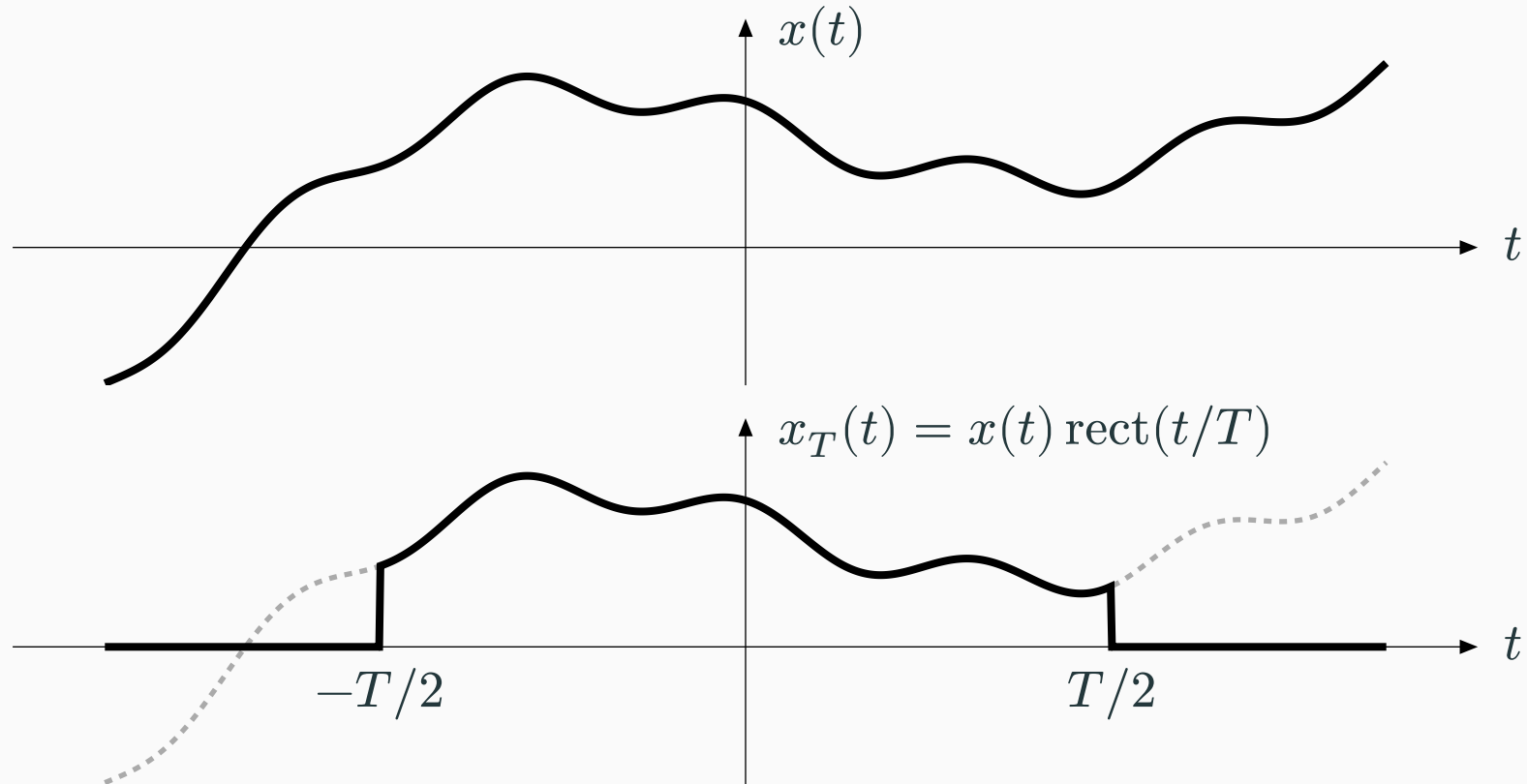
- Um sinal periódico.
- Um sinal de comunicação transmitindo dados continuamente.

Nesses casos, a energia do sinal é sempre infinita!

Como definir uma medida adequada de “intensidade”?

Sinal truncado no tempo

Ideia: Calcular a energia média por unidade de tempo (ou seja, potência).



Potência de um sinal

A **potência** de um sinal real $x(t)$ é definida por

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt,$$

onde $x_T(t) = x(t) \text{rect}(t/T)$ é a versão truncada de $x(t)$ ao intervalo $[-T/2, T/2]$.

Um sinal com $0 < P_x < \infty$ é chamado de **sinal de potência**.

No caso particular de um sinal periódico $x(t)$ com período T_0 ,

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [x(t)]^2 dt.$$

Tente responder

1. Mostre que um sinal não pode ser simultaneamente de energia e de potência.
2. Dê um exemplo de sinal que não é nem de energia e nem de potência.
3. Demonstre a fórmula particular para a potência de um sinal periódico.

Exercício 5

Determine a potência do sinal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \theta)$.

Exercício 5

Determine a potência do sinal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \theta)$.

Resposta: $P_x = A^2/2$.

Como definir a densidade espectral de potência?

Problema: O teorema de Parseval só se aplica a sinais de energia.

Ideia: O sinal original $x(t)$ pode ser de potência, mas o sinal truncado $x_T(t)$ é de energia!
Portanto, podemos aplicar o teorema de Parseval ao sinal truncado $x_T(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x_T(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df,$$

onde $X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$. Assim,

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} [x_T(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 df.$$

Encontramos algo que quando integrado na frequência fornece potência.

A **densidade espectral de potência** de um sinal de potência $x(t)$ é definida por

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2.$$

Esta definição é motivada pela última fórmula do slide anterior. Assim:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df.$$

Observação: Muitas vezes, é difícil calcular a densidade espectral de potência a partir da definição acima. Felizmente, há uma versão do teorema de Wiener–Khinchin também para sinais de potência, que será vista em breve.

Autocorrelação temporal de potência

A **autocorrelação temporal de potência** de um sinal real de potência $x(t)$ é definida por

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t - \tau) dt.$$

Novamente, é uma medida da similaridade entre $x(t)$ e sua versão deslocada de τ .

Propriedades:

1. $R_x(\tau)$ é par.
2. $P_x = R_x(0)$.

No caso particular de um sinal periódico $x(t)$ com período T_0 ,

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x(t - \tau) dt.$$

Teorema de Wiener–Khinchin para sinais de potência determinísticos

A autocorrelação temporal de potência $R_x(\tau)$ e a densidade espectral de potência $S_x(f)$ são pares transformados de Fourier:

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}.$$

Teorema de Wiener–Khinchin para sinais de potência determinísticos

A autocorrelação temporal de potência $R_x(\tau)$ e a densidade espectral de potência $S_x(f)$ são pares transformados de Fourier:

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Psi_{x_T}(f) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{F}\{\psi_{x_T}(\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \psi_{x_T}(\tau) \right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)x_T(t-\tau) dt \right\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 6

Determine a autocorrelação temporal de potência e a densidade espectral de potência do sinal

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \theta).$$

Em seguida, verifique o valor de P_x obtido no exercício anterior.

Exercício 6

Determine a autocorrelação temporal de potência e a densidade espectral de potência do sinal

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \theta).$$

Em seguida, verifique o valor de P_x obtido no exercício anterior.

Resposta:

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau).$$

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0).$$

Processos estocásticos ESA

Processos estocásticos estacionários no sentido amplo

Um processo estocástico $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido amplo (ESA)** se

1. Sua função média $\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ é constante com t .
2. Sua função autocovariância $C_X(t_1, t_2) = \text{cov}[X(t_1), X(t_2)]$ depende de t_1 e t_2 apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$.

Nesse caso, define-se

$$\mu_X = \mu_X(t) \quad \text{e} \quad C_X(\tau) = C_X(t_1, t_2).$$

Autocorrelação estatística de um processo estocástico ESA

A **autocorrelação estatística** de um processo estocástico ESA $X(t)$ é definida por

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X(t - \tau)].$$

Note que

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2.$$

Contraste: Autocorrelação *temporal* de potência de um sinal determinístico $x(t)$:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t - \tau) dt.$$

Autocorrelação *estatística* de um processo estocástico ESA $X(t)$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X(t - \tau)].$$

Densidade espectral de potência

Lembre que definimos a *densidade espectral de potência* de um sinal $x(t)$ determinístico como

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2,$$

onde $X_T(f)$ é a transformada de Fourier do sinal truncado $x_T(t) = x(t) \text{rect}(t/T)$.

Para o caso de um processo estocástico $X(t)$ estacionário no sentido amplo, define-se sua **densidade espectral de potência** como

$$S_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}[|X_T(f)|^2].$$

Teorema de Wiener–Khinchin para processos estocásticos ESA

A autocorrelação estatística $R_X(\tau)$ e a densidade espectral de potência $S_X(f)$ são pares transformados de Fourier:

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}.$$

Teorema de Wiener–Khinchin para processos estocásticos ESA

A autocorrelação estatística $R_X(\tau)$ e a densidade espectral de potência $S_X(f)$ são pares transformados de Fourier:

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}.$$

Demonstração: Ver [1, Sec. 9.3] ou [2].

Densidade espectral e sistemas LTI

Sistemas lineares invariantes no tempo

Considere um *sistema linear invariante no tempo* \mathcal{S} , tendo $x(t)$ em sua entrada e $y(t)$ em sua saída.



Da teoria de sinais e sistemas, sabe-se que

$$y(t) = h(t) \star x(t),$$

onde $h(t) = \mathcal{S}[\delta(t)]$ é a *resposta ao impulso* do sistema, e

$$Y(f) = H(f)X(f),$$

onde $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ é a *resposta em frequência* do sistema.

Densidade espectral e sistemas LTI

Suponha que $x(t)$ e $y(t)$ sejam sinais de energia. Tomando o módulo quadrático da equação acima, obtém-se

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2,$$

ou seja,

$$\Psi_y(f) = |H(f)|^2 \Psi_x(f).$$

Analogamente, para sinais de potência $x(t)$ e $y(t)$ determinísticos,

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f),$$

e, para processos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ estacionários no sentido amplo,

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f).$$

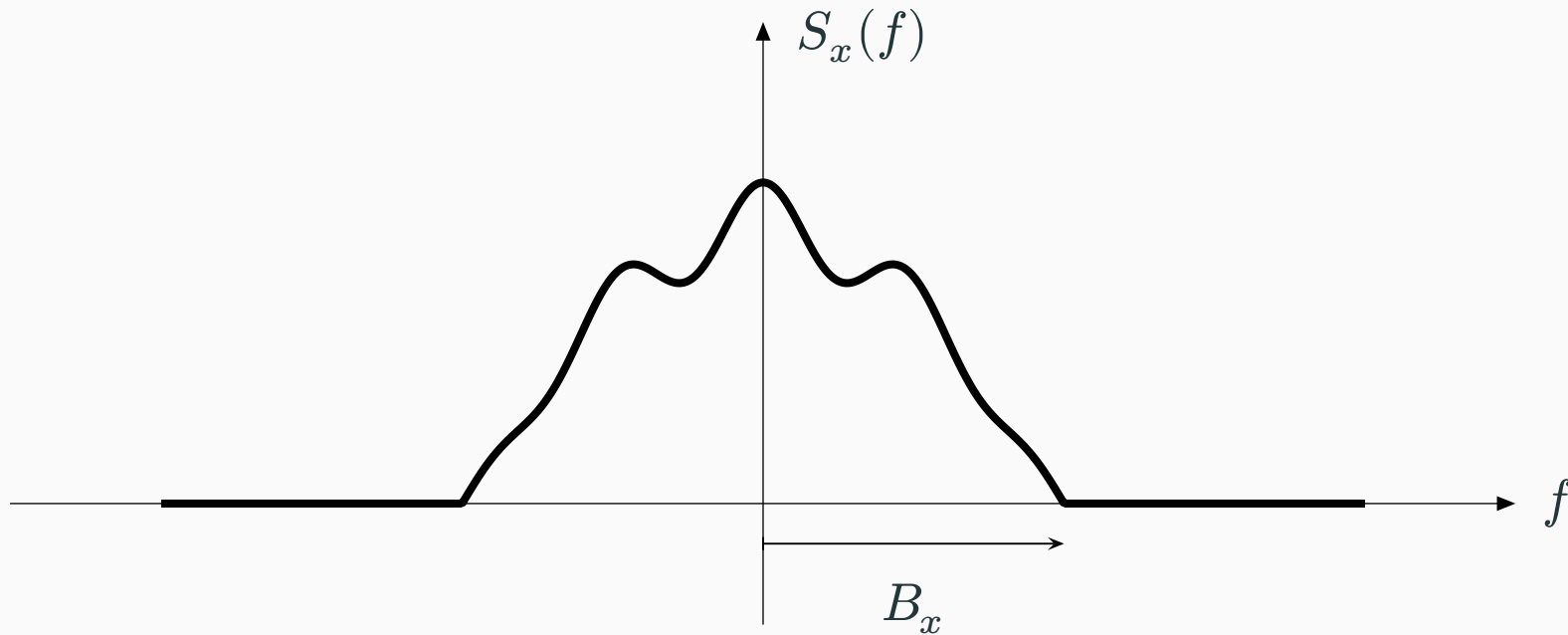
Medidas de largura de banda

A partir das diversas definições de densidade espectral, podemos definir o conceito de *largura de banda* de um sinal.

Neste momento, será considerado apenas sinais em **banda base**, isto é, sinais cujo conteúdo espectral está em torno do DC (isto é, 0 Hz).

Largura de banda absoluta

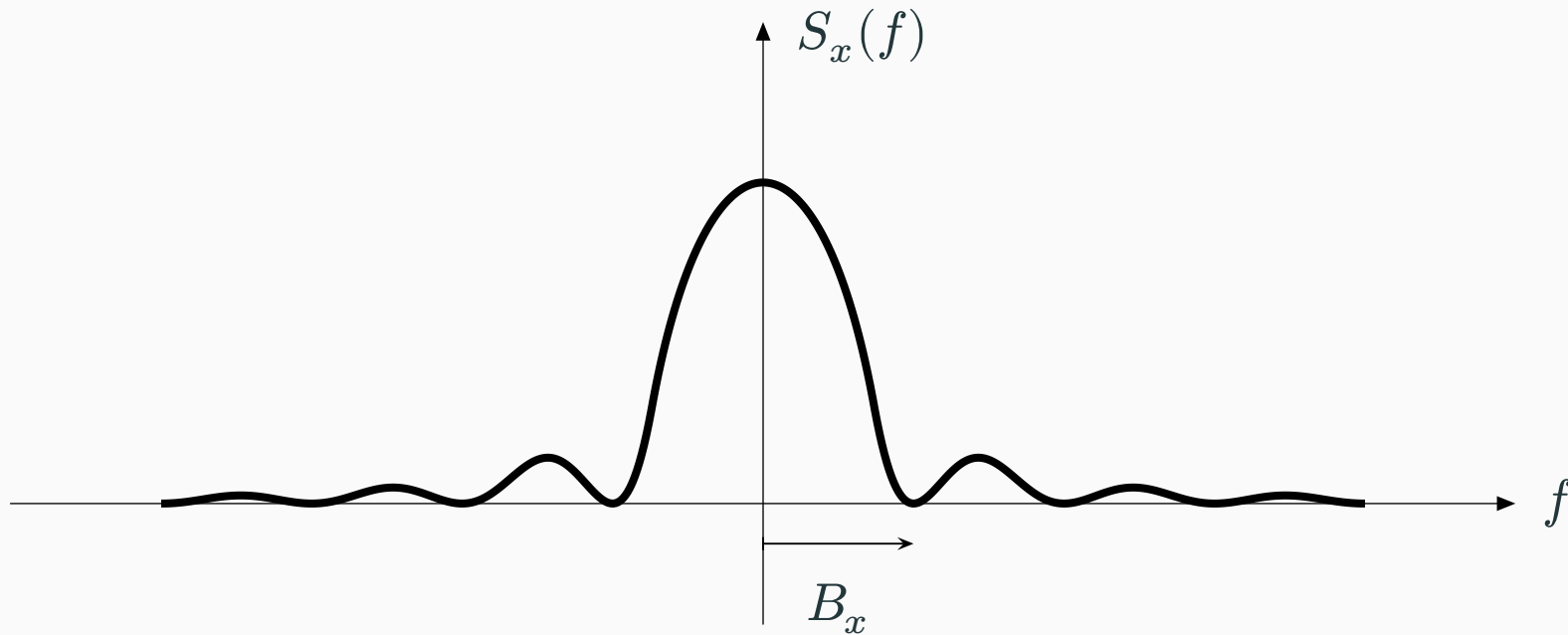
A **largura de banda absoluta** de um sinal $x(t)$ é definida como o menor valor de B_x tal que $S_x(f) = 0$ para todo $f > B_x$.



Problema: Sinais de duração finita têm largura de banda absoluta infinita.

Largura de banda de primeiro lóbulo

A **largura de banda de primeiro lóbulo** de um sinal $x(t)$ é definida como o menor valor positivo de B_x tal que $S_x(B_x) = 0$.



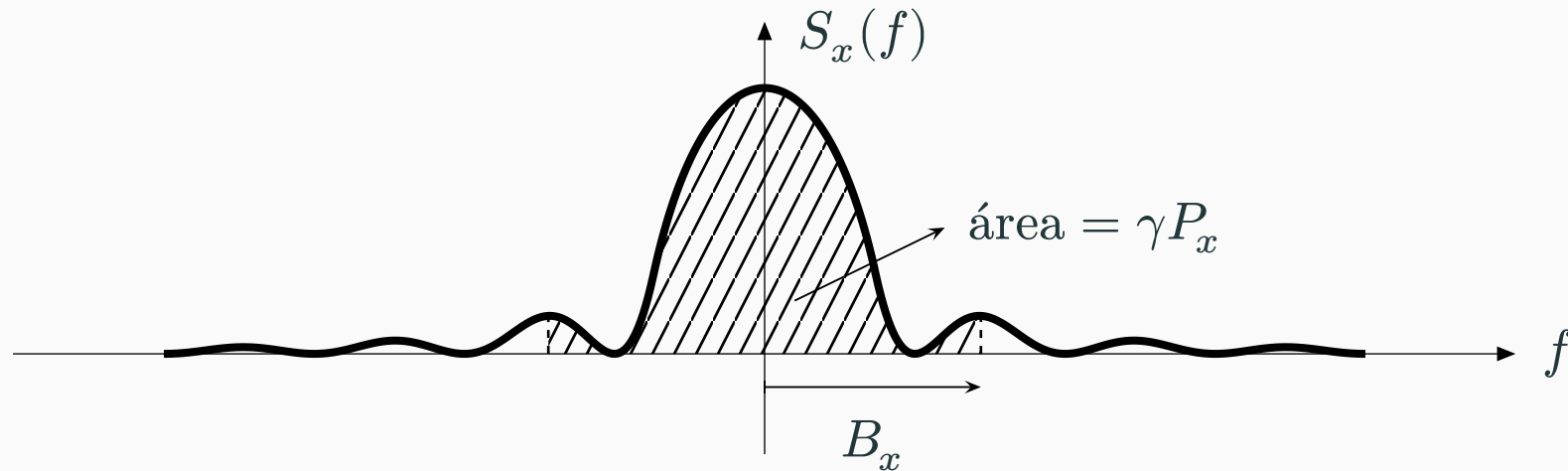
Aplicação: Sinais formados por pulsos retangulares.

Largura de banda ocupada

A **largura de banda ocupada** de um sinal $x(t)$ é definida como o valor de B_x tal que

$$\int_{-B_x}^{B_x} S_x(f) df = \gamma P_x,$$

onde $0 \leq \gamma \leq 1$ e $P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$ é a potência total de $x(t)$.



Aplicação: Normas e padrões (por exemplo, $\gamma = 0.99$).

A **largura de banda rms** (*root-mean-square*) de um sinal $x(t)$ é definida como

$$B_x = \sqrt{\frac{1}{P_x} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 S_x(f) df}.$$

Observações:

- Essa definição equivale ao *desvio padrão* da distribuição correspondente à densidade espectral de potência normalizada $S_x(f)/P_x$.
- “Uma característica atraente da largura de banda rms [...] é que ela se presta mais facilmente à avaliação matemática do que [outras] definições de largura de banda, mas não é fácil medi-la em laboratório.” [3, p. 721].

Referências

Referências

- [1] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.
- [2] Frank R. Kschischang, “The Wiener–Khinchin Theorem.” [Online]. Available: <https://www.comm.utoronto.ca/~frank/notes/wk.pdf>
- [3] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2001.