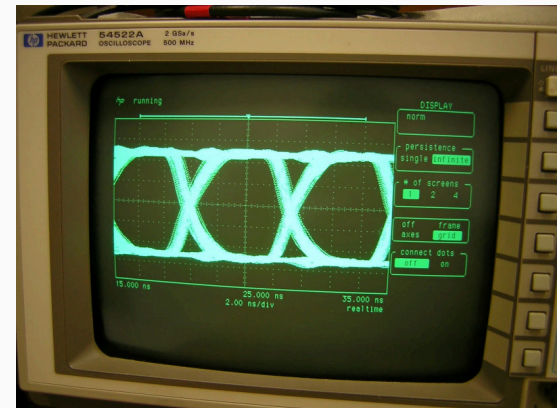


Sistemas de Comunicação

Modulação por amplitude de pulso



Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

Instituto Federal de Santa Catarina

Introdução



$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}[n] p(t - nT_s)$$

Entrada:

- $\mathbf{u}[n]$: sequência de números reais.

Saída:

- $x(t)$: sinal modulado em PAM.

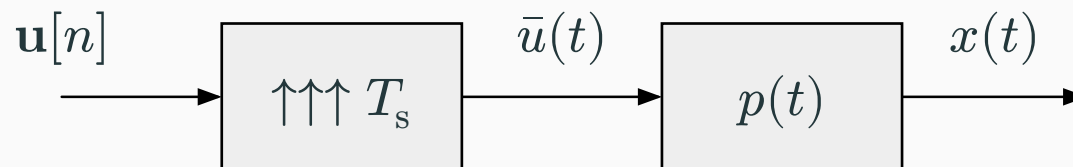
Parâmetros:

- T_s : intervalo de símbolo (s).
- $R_s = 1/T_s$: taxa de símbolos (símbolos/s $\stackrel{\text{def}}{=} \text{baud}$).
- $p(t)$: pulso de transmissão, com $E_p = 1$.

Observação: A condição $E_p = 1$ simplifica a matemática e não resulta em perda de generalidade.

Modelo matemático alternativo

Do ponto de vista matemático (e também de simulação), é útil separar o modulador conforme as duas etapas abaixo.



De fato,

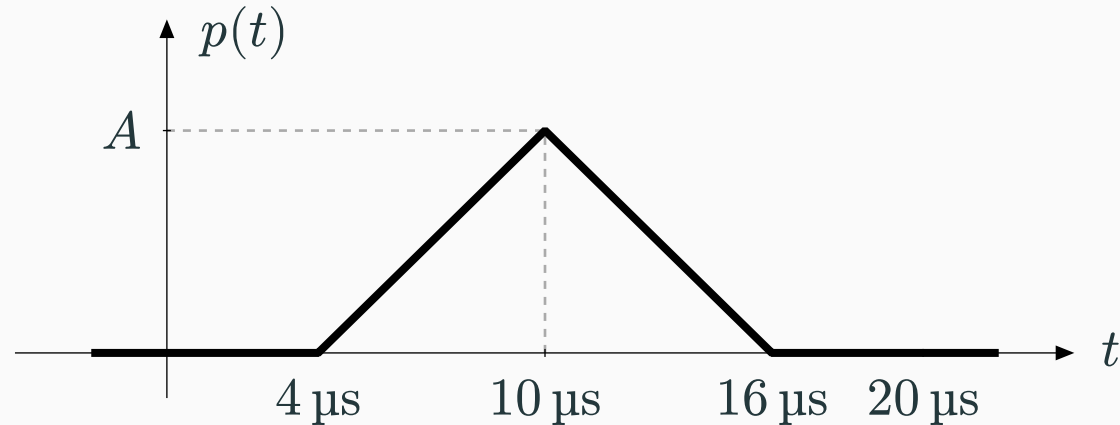
$$\bar{u}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}[n] \delta(t - nT_s)$$

e, portanto,

$$x(t) = p(t) \star \bar{u}(t) = p(t) \star \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}[n] \delta(t - nT_s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}[n] p(t - nT_s).$$

Exercício 1

Considere o pulso de transmissão $p(t)$ abaixo.



- Determine uma expressão analítica para $p(t)$.
- Determine o valor da constante A de modo que $p(t)$ tenha energia unitária.
- Assumindo $R_s = 50 \text{ kbaud}$, esboce o sinal $x(t)$ modulado em PAM correspondente à sequência de entrada $\mathbf{u}[n] = [+0.4, -0.1, -0.5, +0.8, -0.2]$.

Exercício 1

Respostas:

$$(a) \quad p(t) = \begin{cases} A(t - 4)/6, & 4 \mu\text{s} \leq t \leq 10 \mu\text{s}, \\ A(16 - t)/6, & 10 \mu\text{s} \leq t \leq 16 \mu\text{s}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

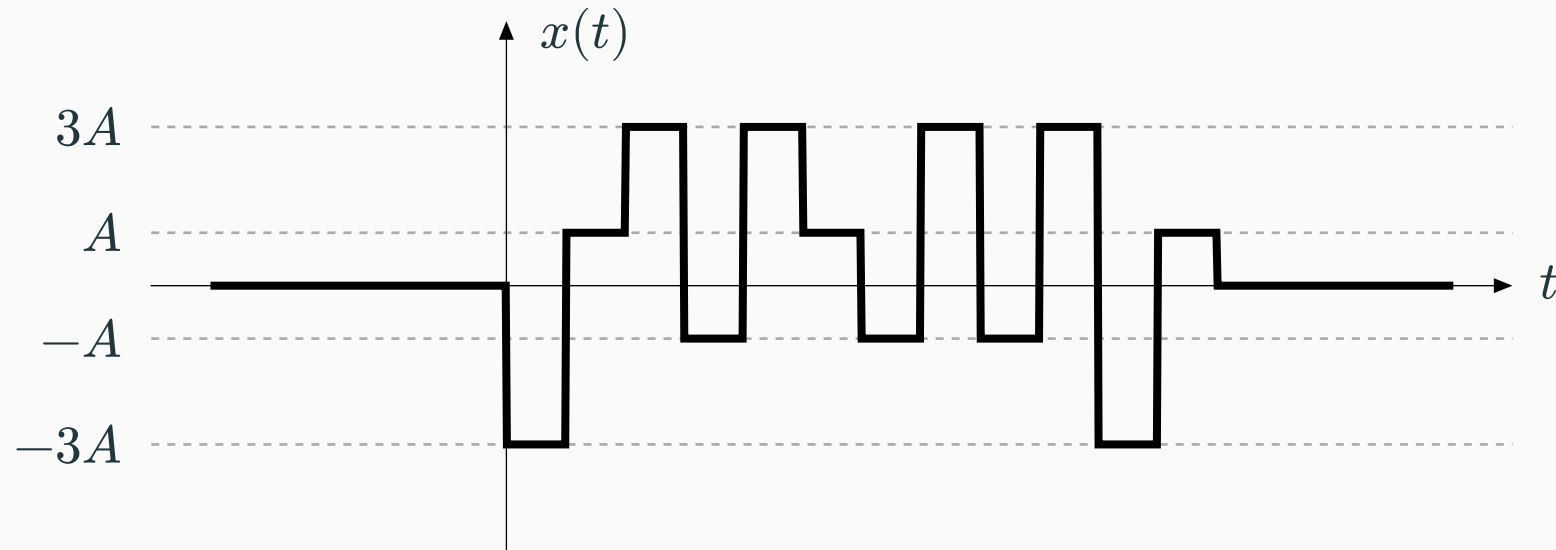
$$(b) \quad A = 500 \sqrt{\text{Hz}}.$$

(c) –

Possíveis escolhas de pulsos

A escolha do pulso $p(t)$ depende da aplicação. Algumas opções são:

- Pulso retangular.



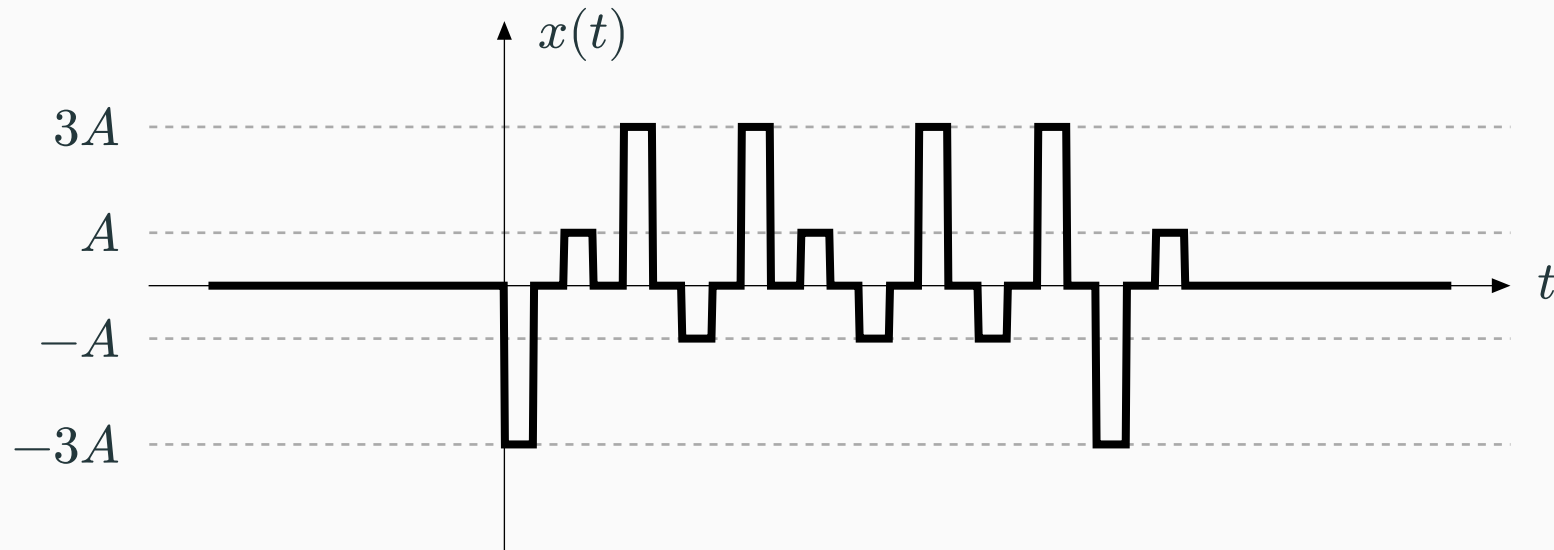
- Pulso sinc.

No decorrer da disciplina encontraremos outros pulsos.

Possíveis escolhas de pulsos

A escolha do pulso $p(t)$ depende da aplicação. Algumas opções são:

- Pulso retangular.



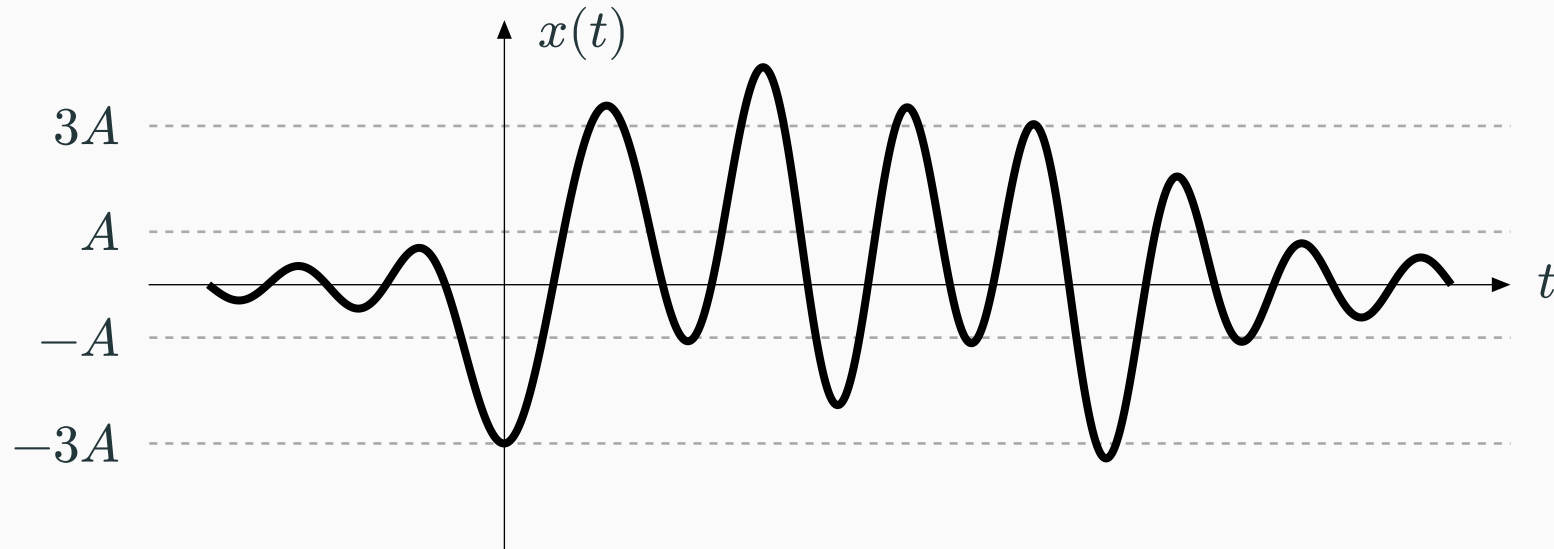
- Pulso sinc.

No decorrer da disciplina encontraremos outros pulsos.

Possíveis escolhas de pulsos

A escolha do pulso $p(t)$ depende da aplicação. Algumas opções são:

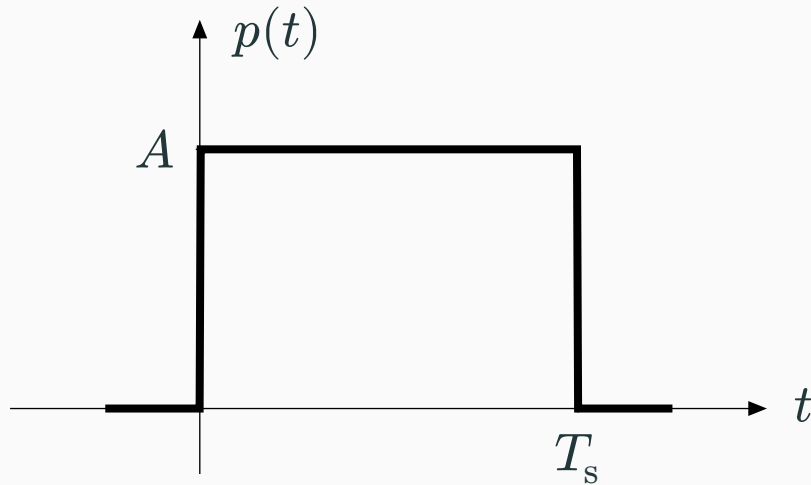
- Pulso retangular.
- Pulso sinc.



No decorrer da disciplina encontraremos outros pulsos.

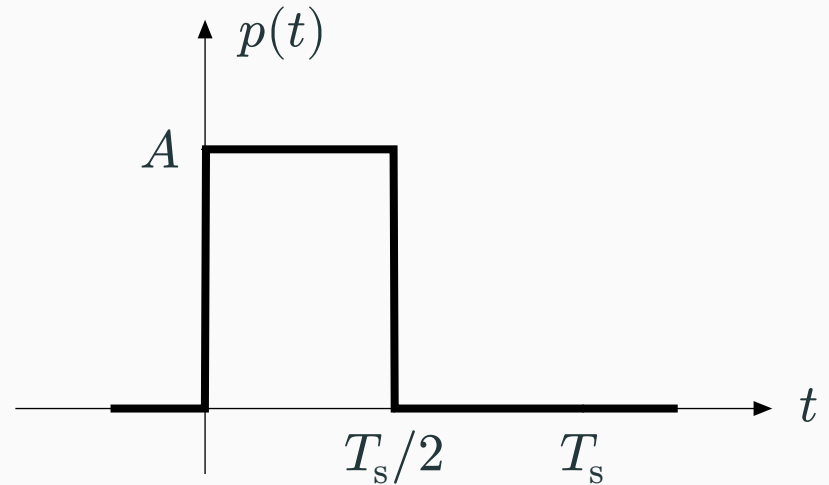
Pulso retangular

Retangular NRZ (*non-return-to-zero*)

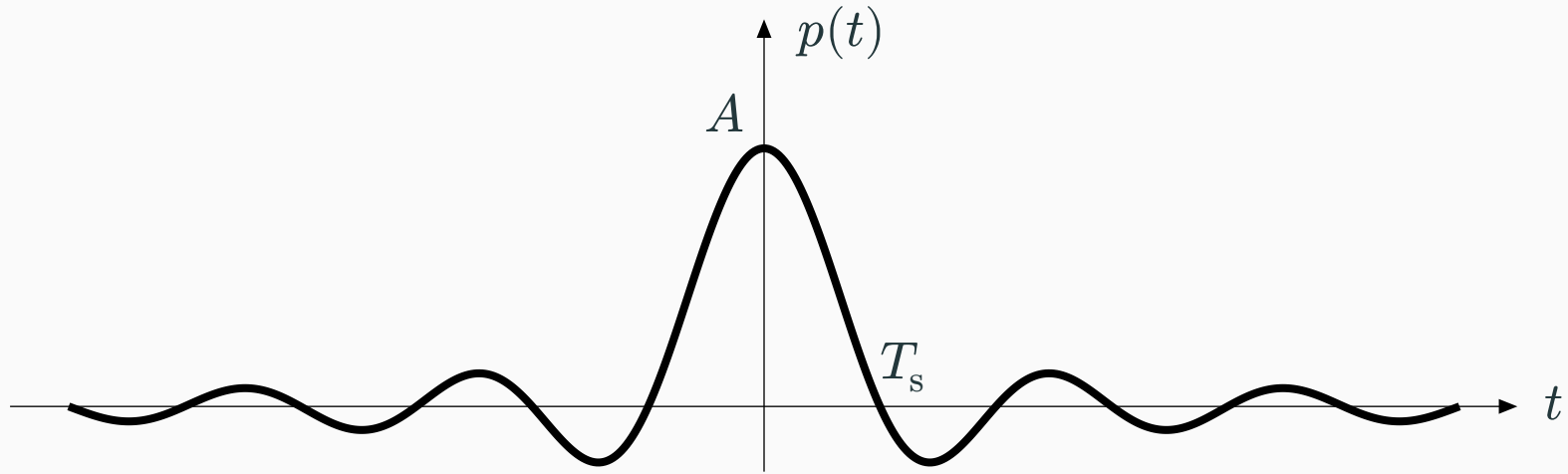


$$p(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

Retangular RZ (*return-to-zero*)



$$p(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - T_s/4}{T_s/2}\right)$$



$$p(t) = A \operatorname{sinc}(t/T_s)$$

O pulso sinc tem duração ilimitada, mas espectro limitado.

Densidade espectral de potência

Teorema: Densidade espectral de potência de um sinal PAM

Seja $\mathbf{u}[n]$ é um processo estocástico de tempo discreto, estacionário no sentido amplo, com média $\mu_{\mathbf{u}}$ e autocovariância $C_{\mathbf{u}}[\ell]$. Então o sinal PAM

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}[n] p(t - nT_s)$$

é *cicloestacionário no sentido amplo*, com densidade espectral de potência dada por

$$S_x(f) = \frac{1}{T_s} |P(f)|^2 S_{\mathbf{u}}(T_s f),$$

onde

- $P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\}$ é o espectro de $p(t)$;
- $S_{\mathbf{u}}(\phi) = \mathcal{F}\{C_{\mathbf{u}}[\ell] + \mu_{\mathbf{u}}^2\}$ é a densidade espectral de potência de $\mathbf{u}[n]$.

Teorema: Densidade espectral de potência de um sinal PAM

Seja $\mathbf{u}[n]$ é um processo estocástico de tempo discreto, estacionário no sentido amplo, com média $\mu_{\mathbf{u}}$ e autocovariância $C_{\mathbf{u}}[\ell]$. Então o sinal PAM

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}[n] p(t - nT_s)$$

é *cicloestacionário no sentido amplo*, com densidade espectral de potência dada por

$$S_x(f) = \frac{1}{T_s} |P(f)|^2 S_{\mathbf{u}}(T_s f),$$

onde

- $P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\}$ é o espectro de $p(t)$;
- $S_{\mathbf{u}}(\phi) = \mathcal{F}\{C_{\mathbf{u}}[\ell] + \mu_{\mathbf{u}}^2\}$ é a densidade espectral de potência de $\mathbf{u}[n]$.

Demonstração: Ver [1, Sec 3.4].

Exercício 2

Determine a densidade espectral de potência do sinal PAM resultante $x(t)$ considerando

(a) $\mathbf{u}[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(\{\pm 1, \pm 3\})$, com $p(t)$ pulso retangular NRZ.

(b) $\mathbf{u}[n] = \alpha[n] + \alpha[n - 1]$, onde $\alpha[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$, com $p(t)$ pulso sinc.

Exercício 2

Determine a densidade espectral de potência do sinal PAM resultante $x(t)$ considerando

(a) $\mathbf{u}[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(\{\pm 1, \pm 3\})$, com $p(t)$ pulso retangular NRZ.

(b) $\mathbf{u}[n] = \boldsymbol{\alpha}[n] + \boldsymbol{\alpha}[n - 1]$, onde $\boldsymbol{\alpha}[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$, com $p(t)$ pulso sinc.

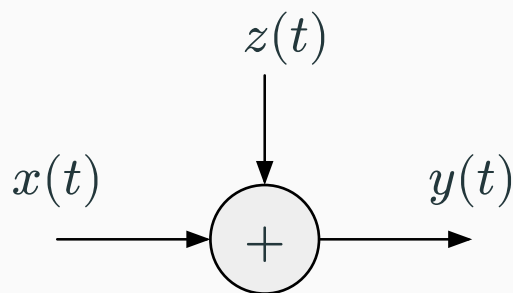
Respostas:

(a) $S_x(f) = 5 \text{sinc}^2(T_s f)$.

(b) $S_x(f) = 4 \cos^2(\pi T_s f) \text{rect}(T_s f)$.

Comunicação na presença de ruído

Assumiremos agora um canal com *ruído gaussiano branco aditivo* (**AWGN**).

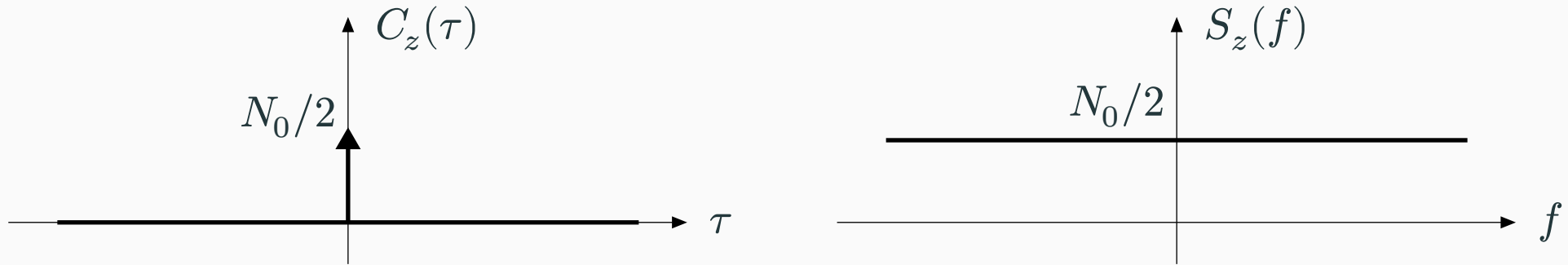


Sinais envolvidos:

- $x(t)$: entrada do canal.
- $y(t)$: saída do canal.
- $z(t)$: ruído aditivo.

Modelo do ruído

O ruído $z(t)$ é modelado como um processo estocástico de tempo contínuo, independente da entrada $x(t)$, gaussiano, estacionário no sentido amplo, de média $\mu_z = 0$, autocovariância $C_z(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ e densidade espectral de potência $S_z(f) = N_0/2$.



Observações:

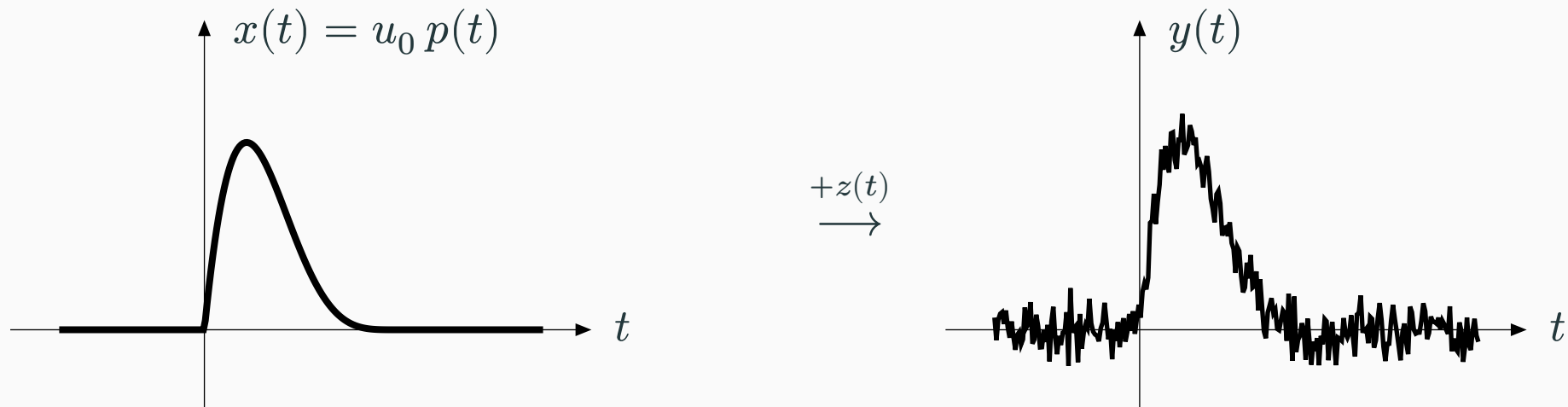
- A constante N_0 tem unidade W/Hz ou V^2/Hz , dependendo do contexto.
- A potência do ruído na faixa de operação fica $\int_{-W}^W S_z(f) df = \int_{-W}^W (N_0/2) df = N_0W$.

O problema da detecção linear ótima

Suponha, inicialmente, que seja transmitido *um único pulso*, isto é,

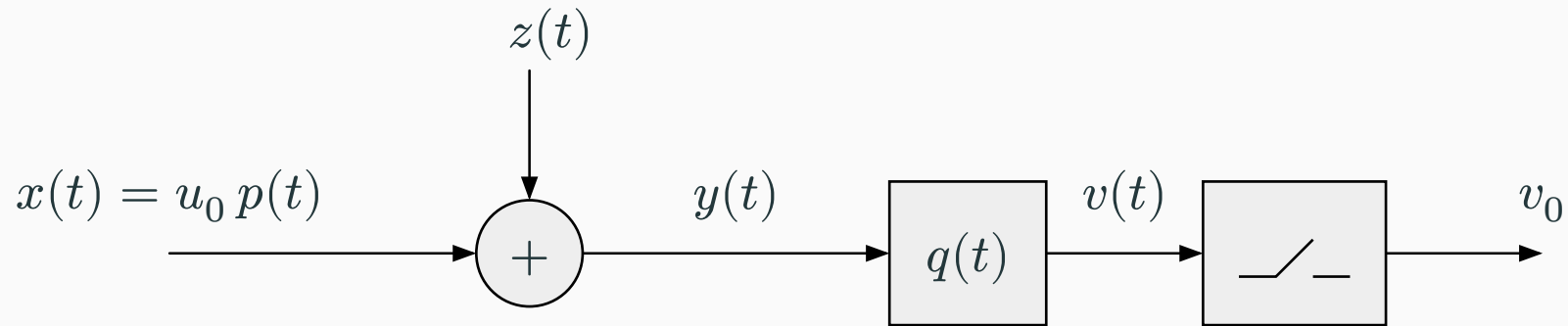
$$x(t) = u_0 p(t),$$

onde u_0 é um número real.



O problema da detecção linear ótima

O problema da *detecção linear ótima* consiste em determinar a resposta ao impulso $q(t)$ do filtro de recepção abaixo que *maximiza* a razão sinal–ruído (SNR) da saída.

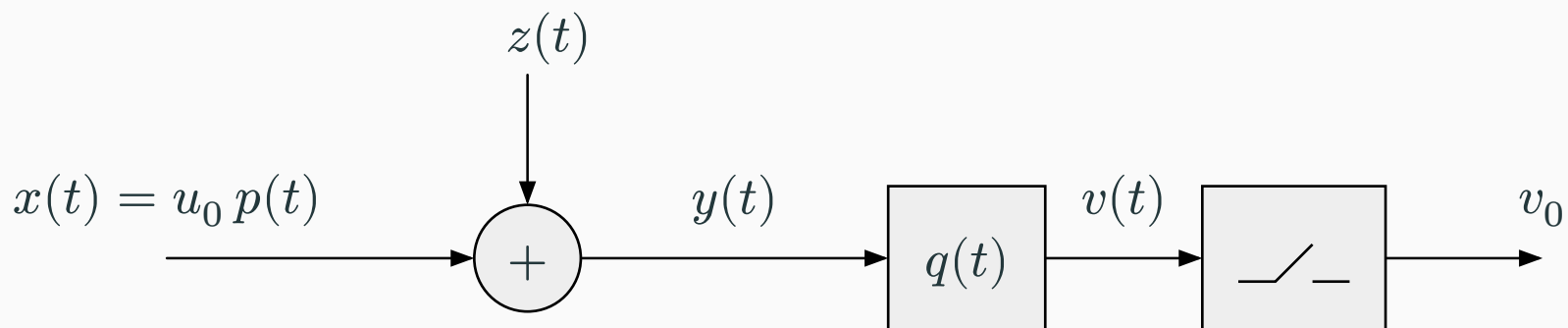


Filtro casado

Teorema. A resposta ao impulso do filtro de recepção $q(t)$ que maximiza a SNR de saída é dada pelo *filtro casado*:

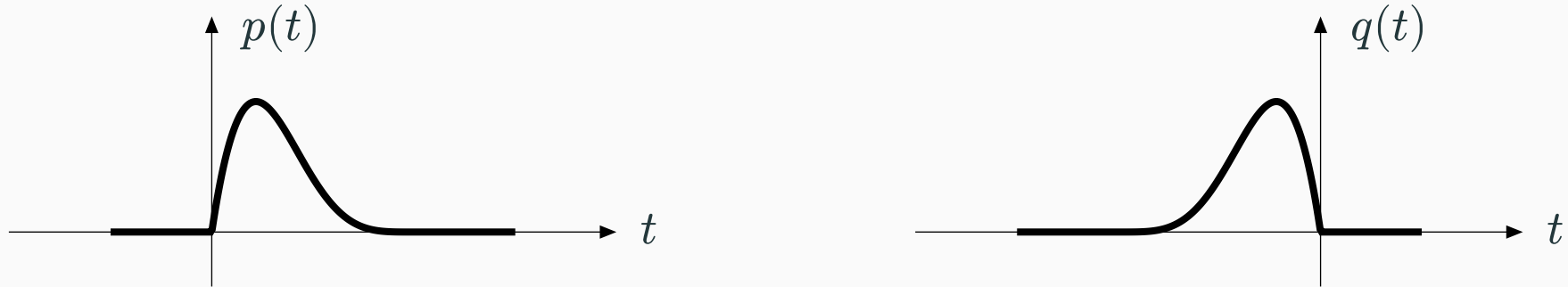
$$q(t) = k p(-t),$$

onde k é qualquer constante não-nula.



Interpretação gráfica do filtro casado

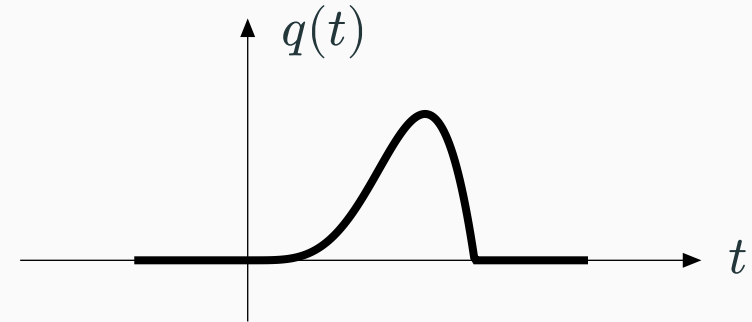
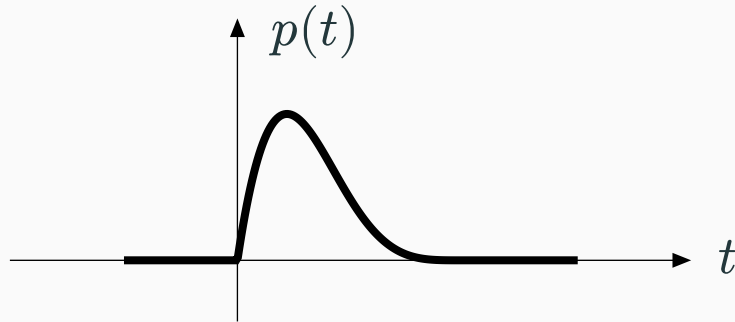
Na filtragem casada, o pulso de recepção $q(t)$ é o *espelho* do pulso $p(t)$:



Se $p(t)$ for causal, então $q(t) = p(-t)$ será não-causal. Na prática, isso é resolvido com um atraso em $q(t)$.

Interpretação gráfica do filtro casado

Na filtragem casada, o pulso de recepção $q(t)$ é o *espelho* do pulso $p(t)$:



Se $p(t)$ for causal, então $q(t) = p(-t)$ será não-causal. Na prática, isso é resolvido com um atraso em $q(t)$.

Lema L₁: Se $h(t)$ possui transformada de Fourier $H(f)$, então

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \, df.$$

Demonstração: Segue da definição da transformada inversa de Fourier.

Lema L₂: Se as integrais abaixo existirem, então

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x) \phi_2(x) \, dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_1(x)|^2 \, dx \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_2(x)|^2 \, dx,$$

com igualdade se e somente se $\phi_2(x) = k \phi_1^*(x)$, onde k é qualquer constante não-nula.

Demonstração: É a desigualdade de Cauchy–Schwarz.

Demonstração do teorema do filtro casado

Assumindo $x(t) = u_0 p(t)$, temos

$$v(t) = q(t) \star y(t) = q(t) \star [x(t) + z(t)] = q(t) \star [u_0 p(t) + z(t)] = \overbrace{u_0 q(t) \star p(t)}^{h(t)} + \overbrace{q(t) \star z(t)}^{w(t)}.$$

- A potência da parcela referente ao sinal, no instante $t = 0$, é dada por

$$P_{\text{sinal}} = u_0^2 [h(0)]^2 \stackrel{L_1}{=} u_0^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) df \right|^2 = u_0^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} P(f)Q(f) df \right|^2 \stackrel{L_2}{\leq} u_0^2 E_p E_q = u_0^2 E_q,$$

com igualdade se e somente se $Q(f) = kP^*(f)$, onde k é qualquer constante não-nula.

- A potência da parcela referente ao ruído é dada por

$$P_{\text{ruído}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_w(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |Q(f)|^2 \underbrace{S_z(f)}_{N_0/2} df = (N_0/2)E_q.$$

Demonstração do teorema do filtro casado

Portanto, a razão sinal–ruído de saída satisfaz

$$\text{SNR} = \frac{u_0^2 [h(0)]^2}{P_w} \leq \frac{u_0^2 E_q}{(N_0/2)E_q} = \frac{u_0^2}{N_0/2},$$

com igualdade se e somente se $Q(f) = kP^*(f)$, onde k é qualquer constante não-nula.

O resultado segue percebendo que $Q(f) = kP^*(f)$ é equivalente a $q(t) = k p(-t)$. ■

Exercício 3

Considere o pulso de transmissão Manchester, dado por

$$p(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - T_s/4}{T_s/2}\right) - A \operatorname{rect}\left(\frac{t - 3T_s/4}{T_s/2}\right).$$

- (a) Esboce $p(t)$.
- (b) Determine o valor da constante A de modo que $p(t)$ tenha energia unitária.
- (c) Esboce o pulso de recepção $q(t)$ casado ao pulso de transmissão $p(t)$. Aplique um atraso em $q(t)$ para torná-lo causal.

Exercício 3

Considere o pulso de transmissão Manchester, dado por

$$p(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - T_s/4}{T_s/2}\right) - A \operatorname{rect}\left(\frac{t - 3T_s/4}{T_s/2}\right).$$

- (a) Esboce $p(t)$.
- (b) Determine o valor da constante A de modo que $p(t)$ tenha energia unitária.
- (c) Esboce o pulso de recepção $q(t)$ casado ao pulso de transmissão $p(t)$. Aplique um atraso em $q(t)$ para torná-lo causal.

Respostas:

(a) –

(b) $A = \sqrt{1/T_s}$.

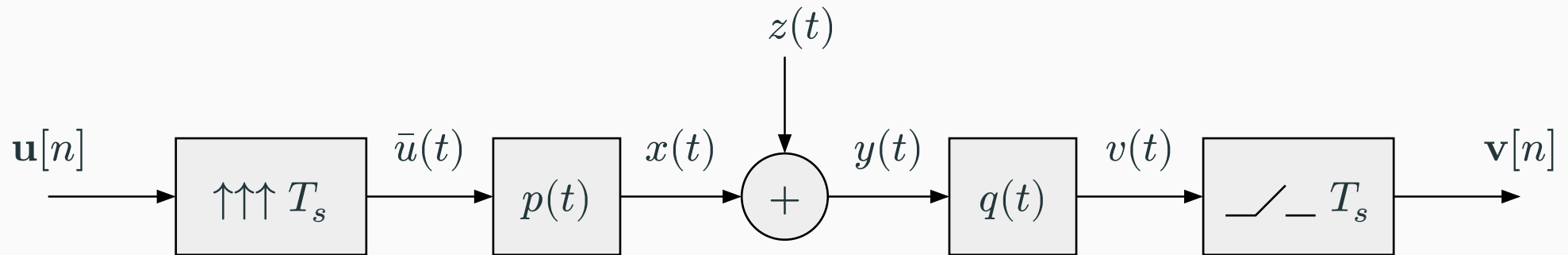
(c) –

Interferência intersimbólica

Modelo matemático

Na seção anterior consideramos a transmissão de um único pulso pelo canal.

Agora, iremos considerar a transmissão de um sinal PAM “completo”.



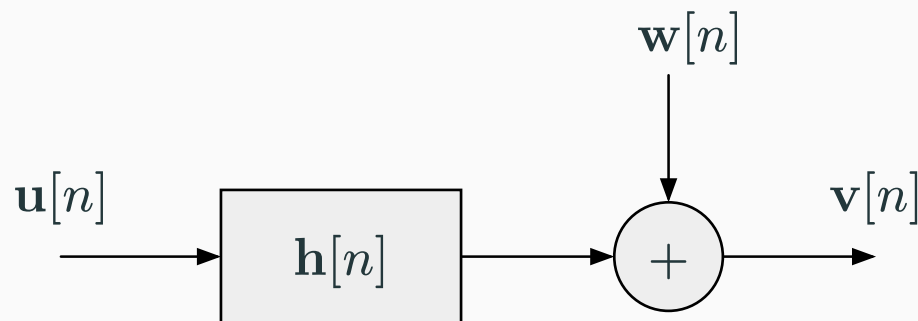
Hipótese: O pulso de recepção $q(t)$ está casado ao pulso de transmissão $p(t)$.

Proposição. Temos

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{h}[n] \star \mathbf{u}[n] + \mathbf{w}[n],$$

em que

- $\mathbf{h}[n] = h(nT_s)$, onde $h(t) = q(t) \star p(t)$ é o **pulso equivalente** do sistema;
- $\mathbf{w}[n] = w(nT_s)$, onde $w(t) = q(t) \star z(t)$ é **ruído filtrado**.



Observação: Ao contrário do ruído original $z(t)$, é possível que o ruído discreto $\mathbf{w}[n]$ tenha amostras correlacionadas.

Demonstração

Temos

$$\begin{aligned}v(t) &= q(t) \star y(t) \\&= q(t) \star [x(t) + z(t)] \\&= q(t) \star [p(t) \star \bar{u}(t) + z(t)] \\&= q(t) \star p(t) \star \bar{u}(t) + q(t) \star z(t) \\&= h(t) \star \bar{u}(t) + w(t) \\&= h(t) \star \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}[i] \delta(t - iT_s) + w(t) \\&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}[i] h(t - iT_s) + w(t).\end{aligned}$$

Substituindo $t = nT_s$:

$$\mathbf{v}[n] = v(nT_s) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}[i] h(nT_s - iT_s) + w(nT_s) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}[i] \mathbf{h}[n - i] + \mathbf{w}[n],$$

de onde segue o resultado. ■

Condição para ISI nula

Abrindo o somatório da convolução:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n] &= \mathbf{h}[n] \star \mathbf{u}[n] + \mathbf{w}[n] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{h}[n - i] \mathbf{u}[i] + \mathbf{w}[n] \\ &= \underbrace{\dots + \mathbf{h}[1] \mathbf{u}[n - 1]}_{\text{indesejado}} + \underbrace{\mathbf{h}[0] \mathbf{u}[n]}_{\text{desejado}} + \underbrace{\mathbf{h}[-1] \mathbf{u}[n + 1] + \dots}_{\text{indesejado}} + \underbrace{\mathbf{w}[n]}_{\text{ruído}}. \end{aligned}$$

Portanto, é desejável que $\mathbf{h}[n] = \delta[n]$, ou, em termos de $h(t)$, que

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t = \pm T_s, \pm 2T_s, \pm 3T_s, \dots \end{cases}$$

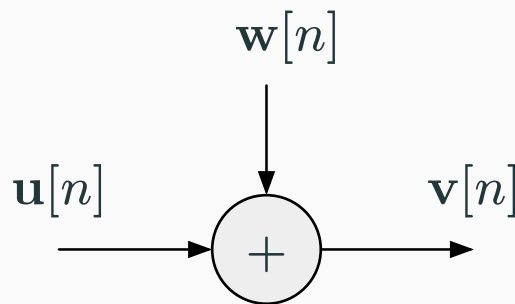
Esta é a chamada *condição para interferência intersimbólica (ISI) nula*.

Modelo em tempo discreto com ISI nula

Hipóteses:

- O pulso de recepção $q(t)$ está casado ao pulso de transmissão $p(t)$.
- O pulso equivalente $h(t) = q(t) \star p(t)$ satisfaz a condição para ISI nula.

O modelo se simplifica como abaixo.



onde $w[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(0, N_0/2)$ (“ruído gaussiano branco discreto”).

Demonstração

Como $\mathbf{h}[n] = \delta[n]$ (da condição para ISI nula), então $\mathbf{v}[n] = \mathbf{h}[n] \star \mathbf{u}[n] + \mathbf{w}[n] = \mathbf{u}[n] + \mathbf{w}[n]$. Portanto, só resta mostrar que $\mathbf{w}[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(0, N_0/2)$.

Como $z(t)$ é estacionário no sentido amplo, gaussiano e de média zero, então $w(t) = q(t) \star z(t)$ também será estacionário no sentido amplo, gaussiano e de média zero, com densidade espectral de potência

$$S_w(f) = |Q(f)|^2 S_z(f) = \Psi_q(f)(N_0/2),$$

onde $\Psi_q(f) = |Q(f)|^2$ é a densidade espectral de energia de $q(t)$. Portanto, a autocovariância de $w(t)$ é

$$C_w(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_w(f)\} = (N_0/2)\mathcal{F}^{-1}\{\Psi_q(f)\} = (N_0/2)\psi_q(\tau) = (N_0/2)h(\tau),$$

onde $\psi_q(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)q(t-\tau) dt$ é a autocorrelação temporal de energia do pulso $q(t)$ e a última igualdade segue da hipótese de filtro casado: $\psi_q(\tau) = q(\tau) \star q(-\tau) = q(\tau) \star p(\tau) = h(\tau)$.

Assim, $\mathbf{w}[n] = w(nT_s)$ também será estacionário no sentido amplo, gaussiano, de média zero e autocovariância $C_{\mathbf{w}}[\ell] = (N_0/2)\mathbf{h}[\ell] = (N_0/2)\delta[\ell]$. Equivalentemente, $\mathbf{w}[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(0, N_0/2)$. ■

Exercício 4

Considere o pulso de transmissão NRZ

$$p(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right).$$

Supondo a sequência de entrada $\mathbf{u}[n] = [-1, +1, +1, -3]$ e ausência de ruído:

- Determine o valor da constante A de modo que $p(t)$ tenha energia unitária.
- Esboce o sinal $x(t)$ transmitido.
- Determine e esboce o pulso de recepção $q(t)$ casado ao pulso de transmissão $p(t)$.
Aplique um atraso em $q(t)$ para torná-lo causal.
- Determine e esboce o pulso equivalente $h(t)$. Este pulso satisfaz a condição para ISI nula?
- Esboce o sinal $v(t)$ na saída do filtro de recepção.
- Determine a sequência de saída $\mathbf{v}[n]$.

Exercício 4

Respostas:

(a) $A = \sqrt{1/T_s}$.

(b) –

(c) $q(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$.

(d) $h(t) = \operatorname{tri}\left(\frac{t - T_s}{T_s}\right)$.

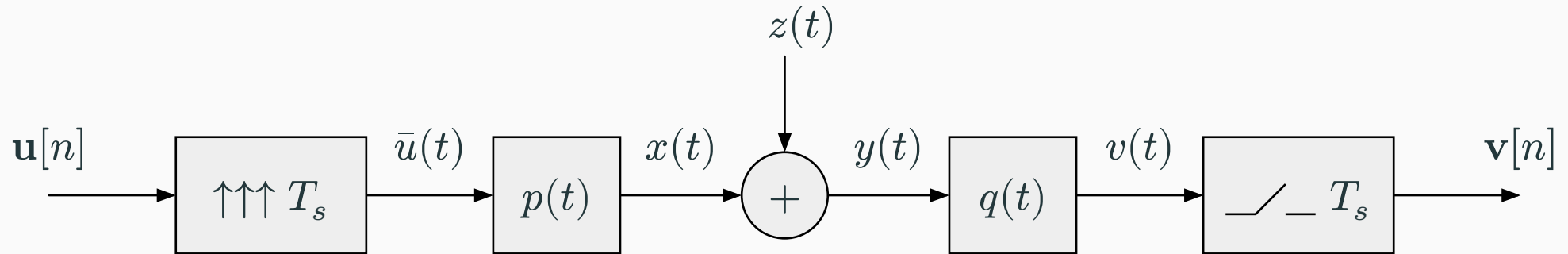
(e) –

(f) $\mathbf{v}[n] = [0, -1, +1, +1, -3]$.

Comunicação com restrição de banda

Comunicação com restrição de banda

Exigiremos agora que o sinal PAM $x(t)$ tenha *largura de banda limitada*, ou seja $B_x < W$.



Relembrando nossas hipóteses:

- O pulso de recepção $q(t)$ está casado ao pulso de transmissão $p(t)$.
- O pulso equivalente $h(t) = q(t) \star p(t)$ satisfaz a condição para ISI nula.

Critério de Nyquist para ISI nula

O seguinte resultado é bastante útil no projeto de pulsos limitados em frequência.

Teorema. (*H. Nyquist, 1928*) A condição para ISI nula, dada no domínio do tempo por

$$h(nT_s) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

é equivalente, no domínio da frequência, a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} H(f - kR_s) = T_s,$$

onde $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$.

Observação: O critério de Nyquist diz respeito ao pulso equivalente e não ao pulso de transmissão.

Demonstração

Novamente, faremos uso do pente de Dirac. A condição no domínio do tempo equivale a

$$h(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_s) = \delta(t).$$

Tomando a transformada de Fourier, obtemos

$$H(f) \star \frac{1}{T_s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = 1,$$

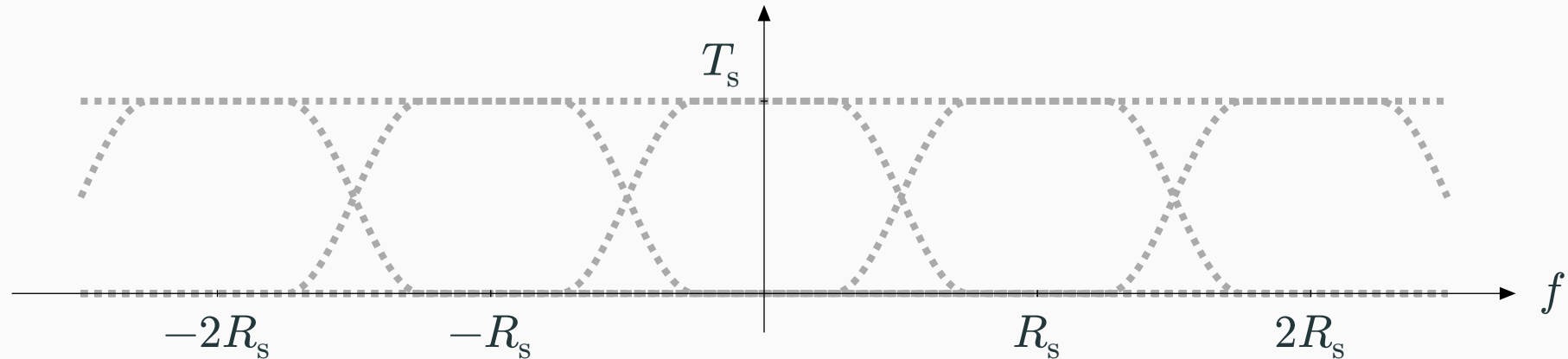
de onde segue que

$$\frac{1}{T_s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} H\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = 1,$$

como queríamos demonstrar. ■

Interpretação gráfica

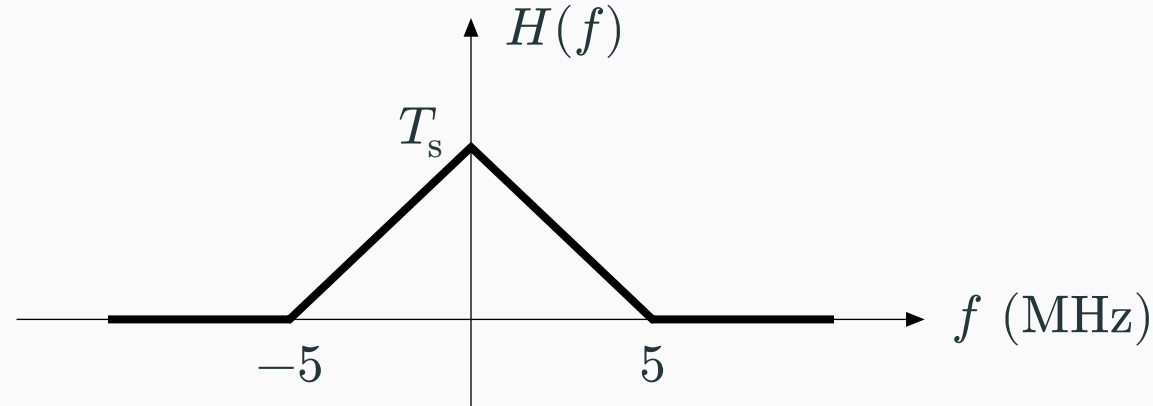
A condição $\sum_{k \in \mathbb{Z}} H(f - kR_s) = T_s$ é ilustrada abaixo.



Ou seja, o somatório de réplicas do espectro do pulso equivalente, centradas em múltiplos de R_s , deve ser uma constante, T_s .

Exercício 5

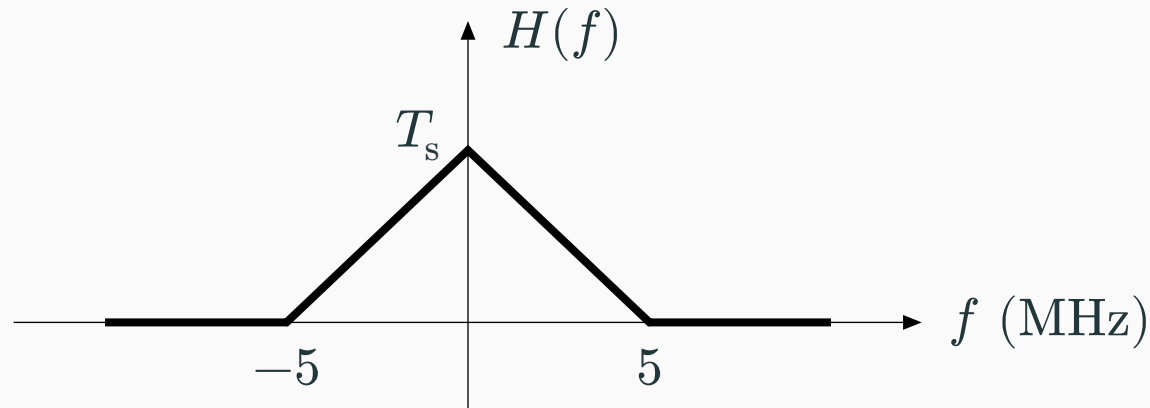
Considere o espectro $H(f)$ de um pulso equivalente mostrado abaixo.



- Para qual taxa de símbolos R_s o pulso satisfaz o critério de Nyquist para ISI nula?
- Determine a forma de onda $h(t)$ do pulso equivalente e, considerando a resposta da letra (a), calcule os valores de $h(nT_s)$ para n inteiro.

Exercício 5

Considere o espectro $H(f)$ de um pulso equivalente mostrado abaixo.



- (a) Para qual taxa de símbolos R_s o pulso satisfaz o critério de Nyquist para ISI nula?
- (b) Determine a forma de onda $h(t)$ do pulso equivalente e, considerando a resposta da letra (a), calcule os valores de $h(nT_s)$ para n inteiro.

Respostas:

(a) $R_s = 5$ Mbaud.

(b) $h(t) = \text{sinc}^2(t/T_s)$, com $h(nT_s) = \delta[n]$.

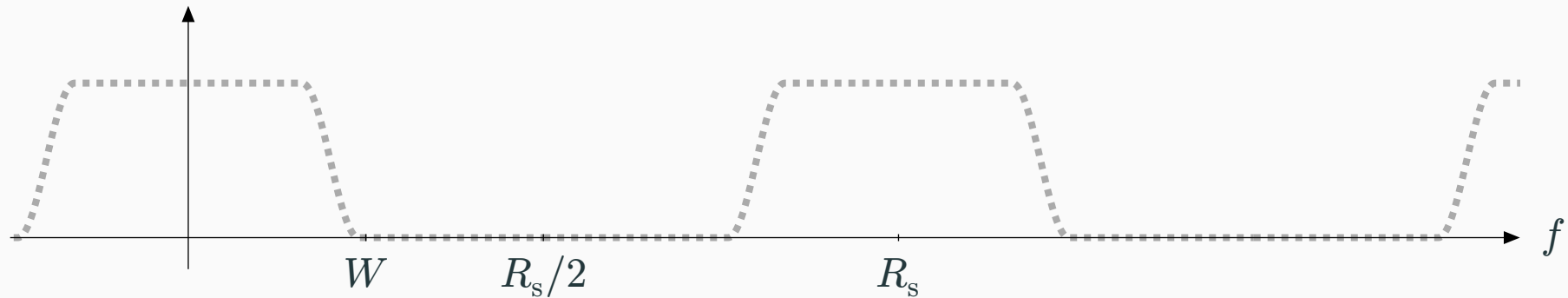
Corolário

Para evitar interferência intersimbólica é necessário

$$W \geq R_s/2.$$

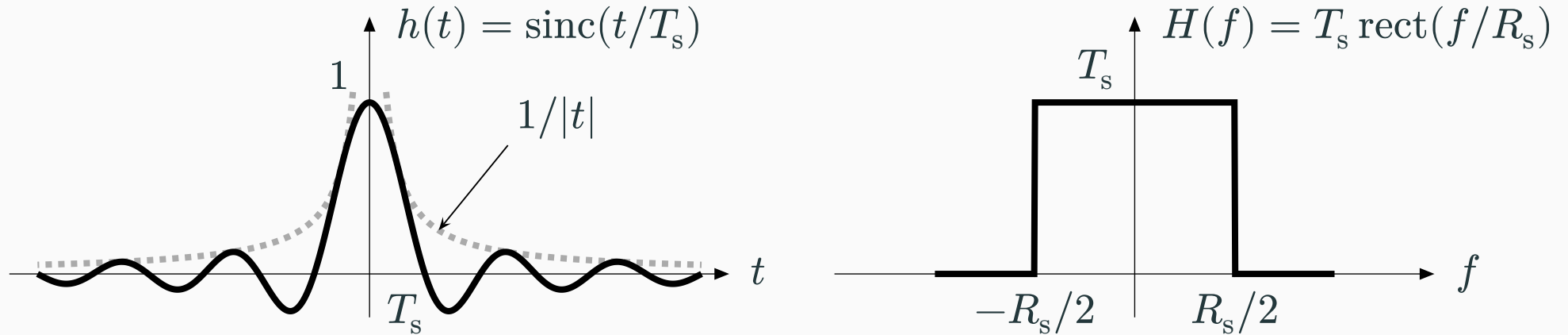
Por exemplo, para se transmitir símbolos à taxa de $R_s = 40$ kbaud sem interferência intersimbólica é necessário ocupar pelo menos 20 kHz.

Demonstração: De fato, se $W < R_s/2$, então é impossível ter $\sum_{k \in \mathbb{Z}} H(f - kR_s) = T_s$:



Pulso sinc

O limite $W = R_s/2$ é alcançado com o pulso sinc.



O problema do pulso sinc é o seu lento decaimento temporal:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \sim \frac{1}{|t|}.$$

Isso torna o pulso sinc sensível ao problema de sincronismo de símbolo.

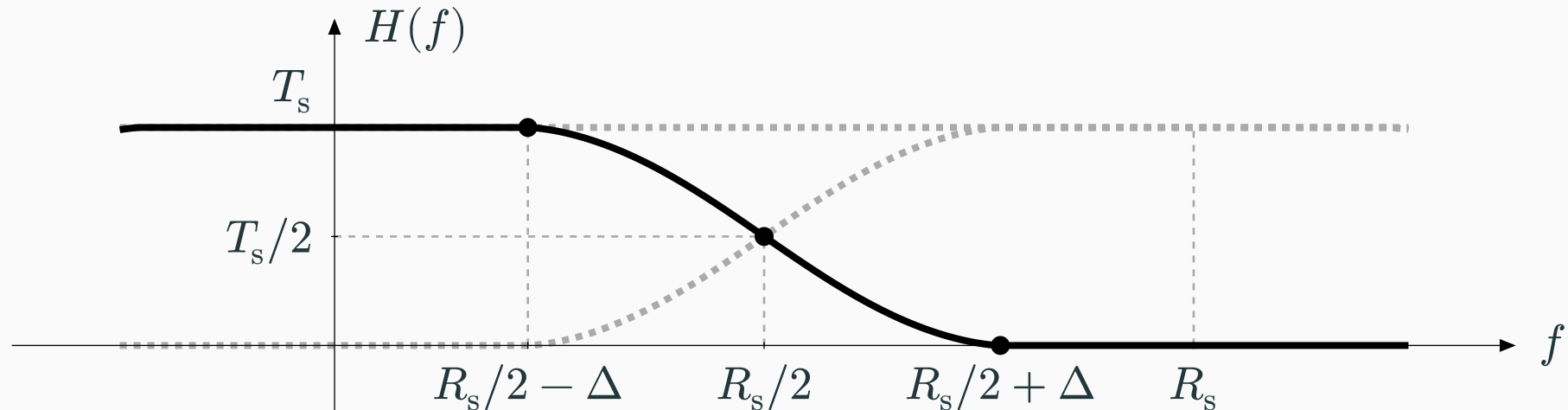
Simetria vestigial

Assuma que o pulso equivalente $h(t)$ tenha largura de banda

$$W = R_s/2 + \Delta,$$

onde $\Delta \in [0, R_s/2]$ é o **excesso de banda** (em Hz) com relação ao mínimo teórico $R_s/2$.

Pelo critério de Nyquist, o espectro do pulso equivalente deve apresentar simetria ímpar ao redor do ponto $(R_s/2, T_s/2)$. Isso é chamado de **simetria vestigial**.



Fator de rolloff

O excesso de banda com relação ao mínimo teórico pode ser expresso em termos relativos:

$$\alpha = \frac{\Delta}{R_s/2}.$$

Essa quantidade é chamada de **fator de rolloff**. Como $\Delta \in [0, R_s/2]$, temos $\alpha \in [0, 1]$.

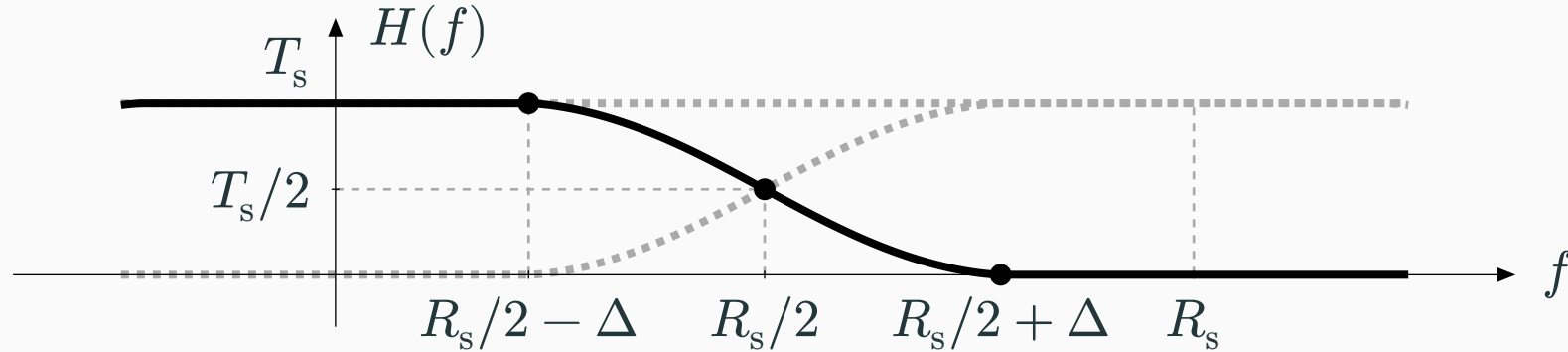
Em termos do fator de rolloff, a largura de banda do pulso é dada por

$$W = \frac{R_s}{2} + \Delta = \frac{R_s}{2}(1 + \alpha).$$

Por exemplo, para uma taxa de símbolos de $R_s = 40$ kbaud e um fator de rolloff de $\alpha = 0.3$, o excesso de banda é de $\Delta = 6$ kHz e a largura de banda ocupada é de $W = 26$ kHz.

Forma geral da simetria vestigial

Para simplificar a notação, sejam $f_1 = R_s/2 - \Delta$ e $f_2 = R_s/2 + \Delta$.



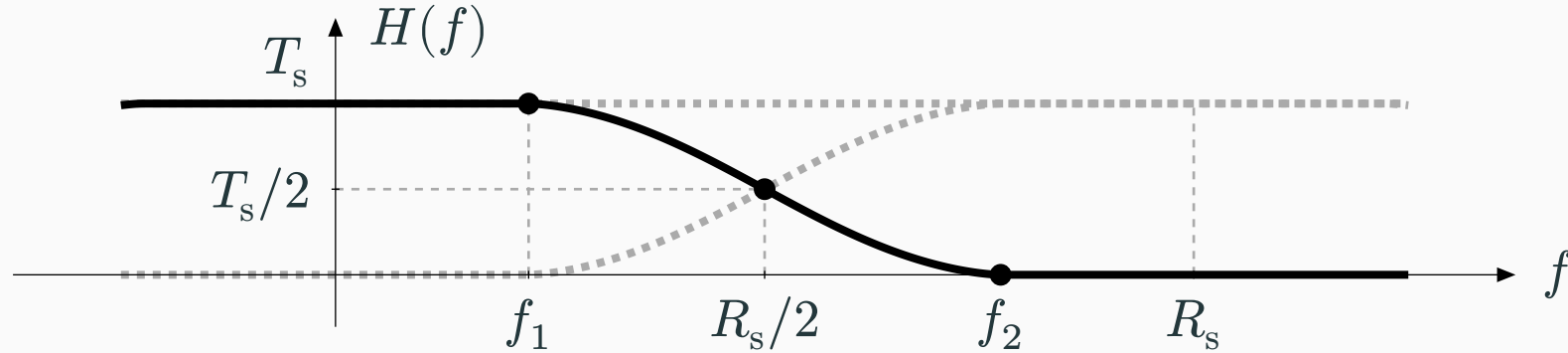
Matematicamente, o espectro de um pulso com simetria vestigial é da forma

$$H(f) = T_s \begin{cases} 1, & |f| < f_1, \\ \Phi\left(\frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1}\right), & f_1 \leq |f| \leq f_2, \\ 0, & f_2 < |f|. \end{cases}$$

onde $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\Phi(x) + \Phi(1 - x) = 1$.

Forma geral da simetria vestigial

Para simplificar a notação, sejam $f_1 = R_s/2 - \Delta$ e $f_2 = R_s/2 + \Delta$.



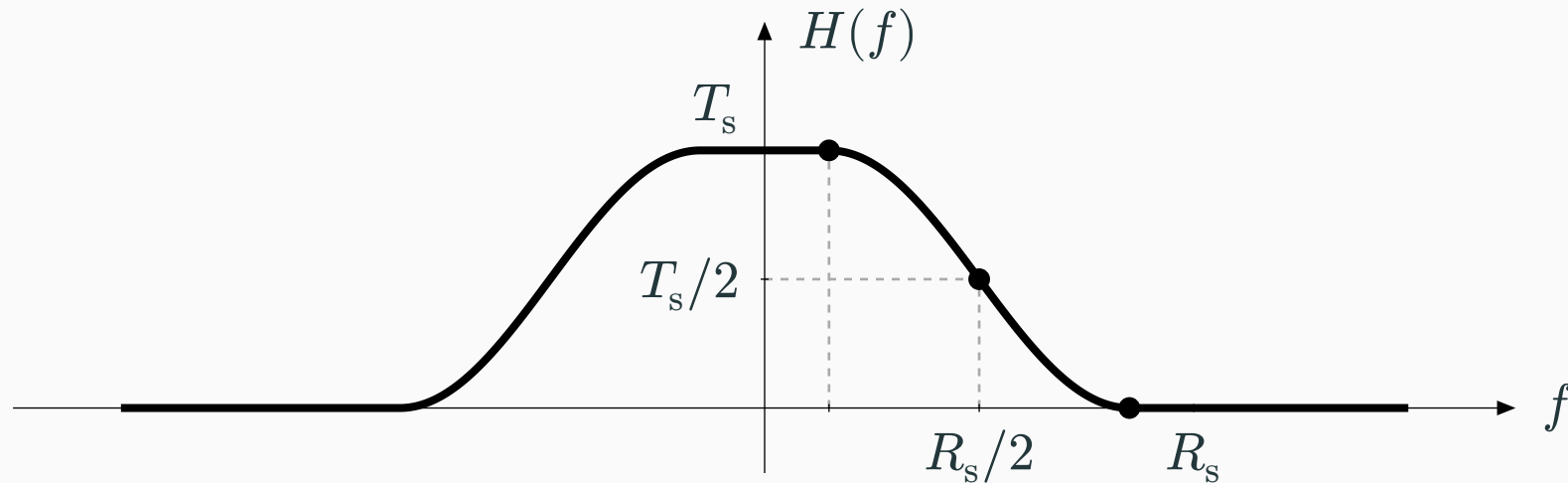
Matematicamente, o espectro de um pulso com simetria vestigial é da forma

$$H(f) = T_s \begin{cases} 1, & |f| < f_1, \\ \Phi\left(\frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1}\right), & f_1 \leq |f| \leq f_2, \\ 0, & f_2 < |f|. \end{cases}$$

onde $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\Phi(x) + \Phi(1 - x) = 1$.

Pulso cosseno levantado

A escolha mais popular de espectro de pulso com simetria vestigial é obtida a partir de $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi x)$. O pulso resultante é chamado de **pulso cosseno levantado**.



Observação: Ao contrário dos pulsos retangular e sinc, o nome “cosseno levantado” é devido ao seu formato no domínio da frequência, e não no domínio do tempo.

No domínio da frequência, o pulso cosseno levantado é dado por

$$H(f) = T_s \begin{cases} 1, & |f| < f_1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1}\right), & f_1 \leq |f| \leq f_2, \\ 0, & f_2 < |f|, \end{cases}$$

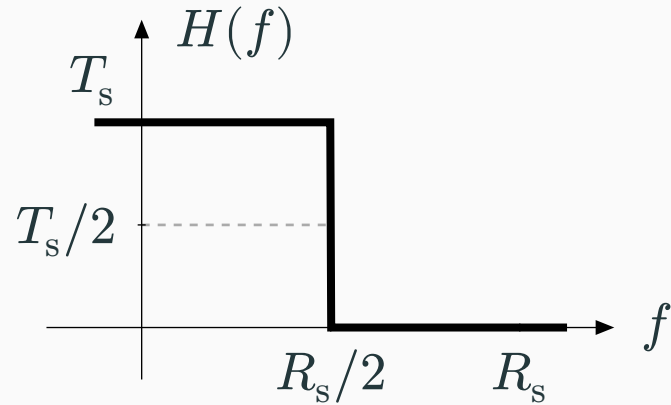
e, no domínio do tempo, por

$$h(t) = \text{sinc}(t/T_s) \frac{\cos(\pi \alpha t/T_s)}{1 - (2\alpha t/T_s)^2},$$

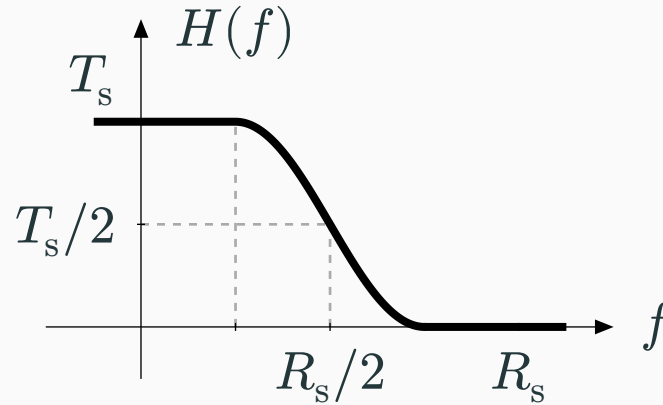
onde f_1 , f_2 e α são definidos como antes.

Formas de onda e espectros

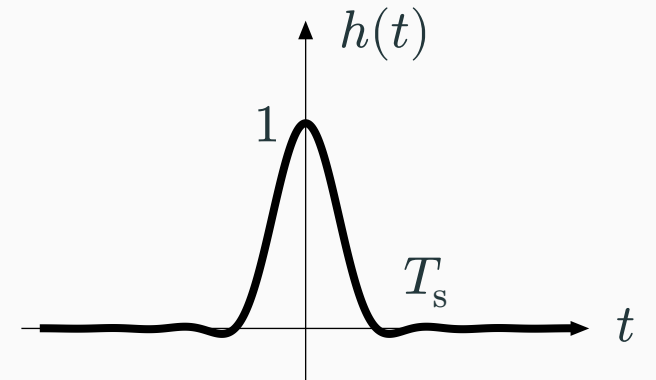
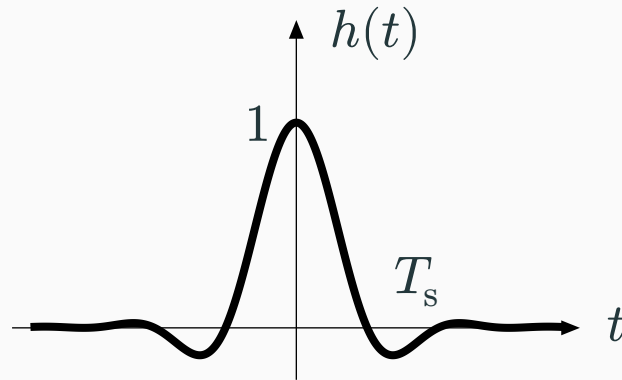
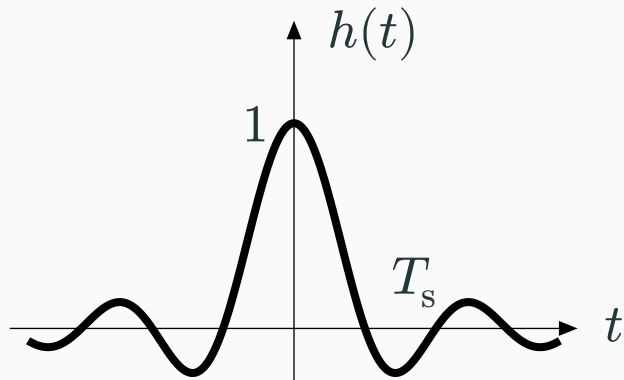
$\alpha = 0$ (pulso sinc)



$\alpha = 1/2$



$\alpha = 1$ ("full cosine")



Exercício 6

Considere um sinal PAM com largura de banda de $W = 75 \text{ kHz}$ e intervalo de símbolo de $T_s = 10 \mu\text{s}$. Esboce o espectro de um pulso cosseno levantado que satisfaz tais requisitos. Qual é o excesso de banda e o fator de rolloff?

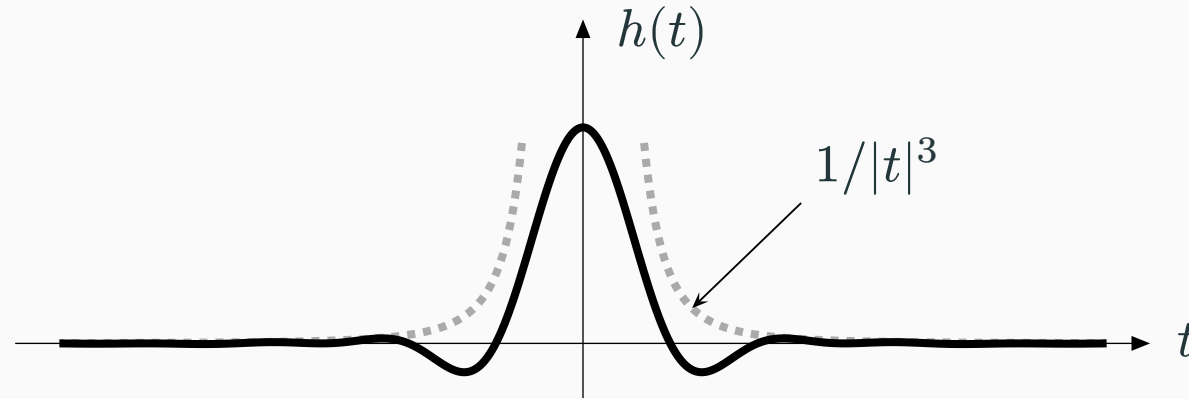
Exercício 6

Considere um sinal PAM com largura de banda de $W = 75 \text{ kHz}$ e intervalo de símbolo de $T_s = 10 \mu\text{s}$. Esboce o espectro de um pulso cosseno levantado que satisfaz tais requisitos. Qual é o excesso de banda e o fator de rolloff?

Resposta: $f_1 = 25 \text{ kHz}$ e $f_2 = 75 \text{ kHz}$. $\Delta = 25 \text{ kHz}$ e $\alpha = 0.5$.

Decaimento rápido

O pulso cosseno levantado resolve o problema do lento decaimento temporal do pulso sinc:



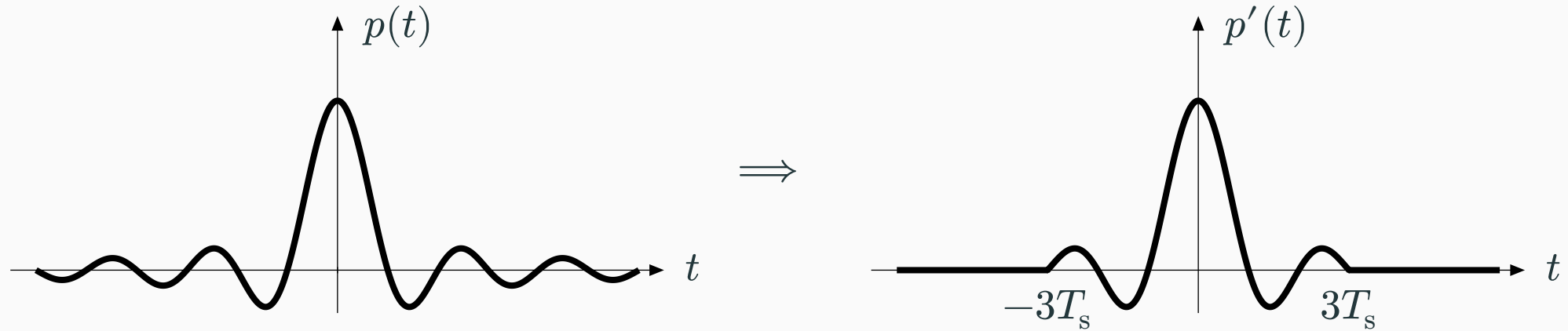
Temos:

$$h(t) = \underbrace{\text{sinc}(t)}_{\sim 1/|t|} \underbrace{\frac{\cos(\pi\alpha t)}{1 - (2\alpha t)^2}}_{\sim 1/|t|^2} \sim \frac{1}{|t|^3}.$$

Como lidar com pulsos de duração ilimitada

Na prática, não é possível utilizar pulsos com duração ilimitada. Isso é resolvido com:

- Um *truncamento*...

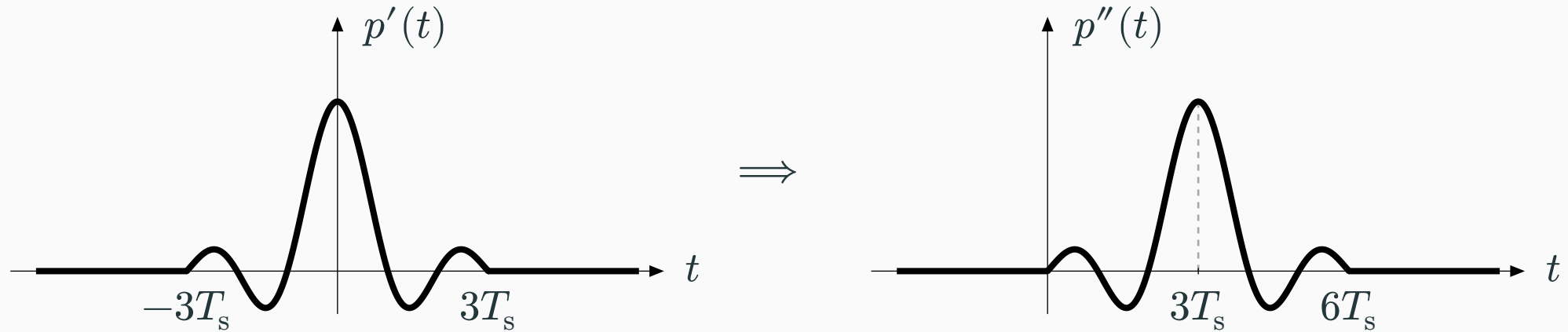


O exemplo considerou um truncamento de $-3T_s$ a $3T_s$. Na prática, o intervalo é maior.

Como lidar com pulsos de duração ilimitada

Na prática, não é possível utilizar pulsos com duração ilimitada. Isso é resolvido com:

- ...em conjunto com um *atraso*.



O clock do receptor ficará atrasado com relação ao do transmissor. Veremos mais detalhes adiante.

Pulsos “root-Nyquist”

- Quando o pulso de transmissão é par, temos $p(-t) = p(t)$.
- Ao utilizarmos filtro casado, temos $q(t) = p(-t) = p(t)$.
- Portanto, o pulso equivalente será $h(t) = p(t) \star q(t) = p(t) \star p(t) = q(t) \star q(t)$.
- No domínio da frequência: $H(f) = [P(f)]^2 = [Q(f)]^2$.

Conclusão:

$$P(f) = Q(f) = \sqrt{H(f)}.$$

Por exemplo, se o pulso equivalente for o pulso cosseno levantado, então tanto o pulso de transmissão quanto o pulso de recepção serão o *pulso raiz do cosseno levantado* (RRC).

Referências

Referências

- [1] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*, 5th ed. McGraw Hill, 2008.
- [2] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2001.
- [3] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.
- [4] R. G. Gallager, *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press, 2008.