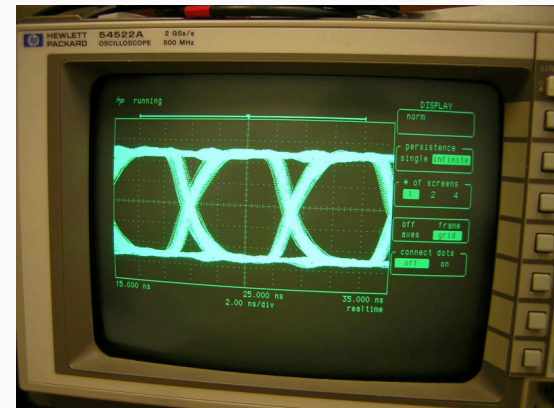


Sistemas de Comunicação

Modulação de portadora



Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

Instituto Federal de Santa Catarina

Introdução

Diagrama de blocos

Modelo de translação em frequência geral:



Nomenclatura:

- $x(t)$ sinal modulante.
- $s(t)$ sinal modulado, sinal transmitido.
- $r(t)$ sinal recebido.
- $\hat{x}(t)$ sinal demodulado.

Sinais em banda base:

$x(t)$ e $\hat{x}(t)$.

Sinais em banda passante:

$s(t)$ e $r(t)$.

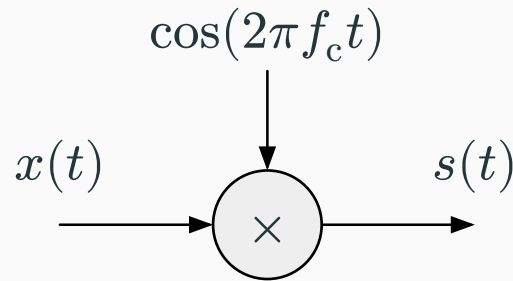
Esquemas de modulação de portadora

Modulação de banda lateral dupla (DSB)

Seja $x(t)$ um sinal em banda base. A modulação de **banda lateral dupla** (DSB) deste sinal é dada por

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t),$$

onde f_c é a frequência da portadora.

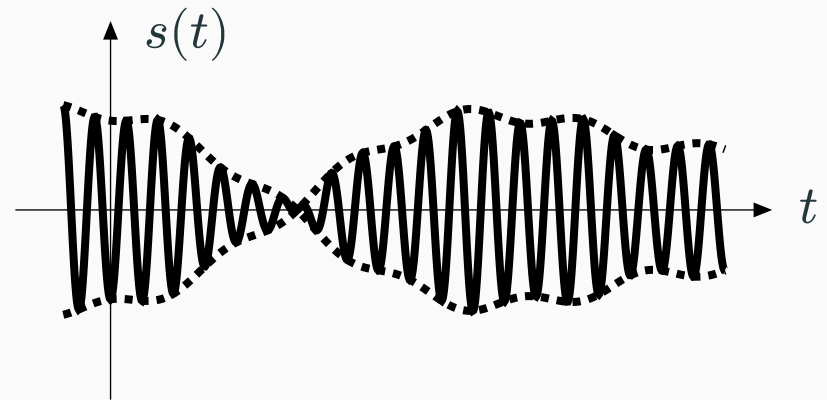
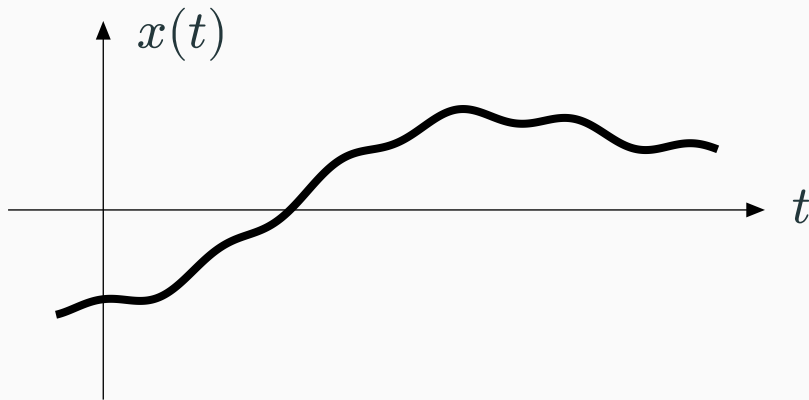


Modulação de banda lateral dupla (DSB)

Seja $x(t)$ um sinal em banda base. A modulação de **banda lateral dupla** (DSB) deste sinal é dada por

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t),$$

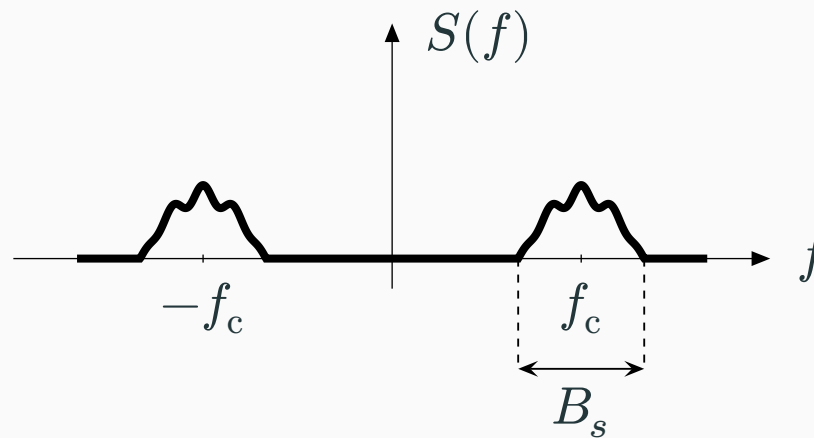
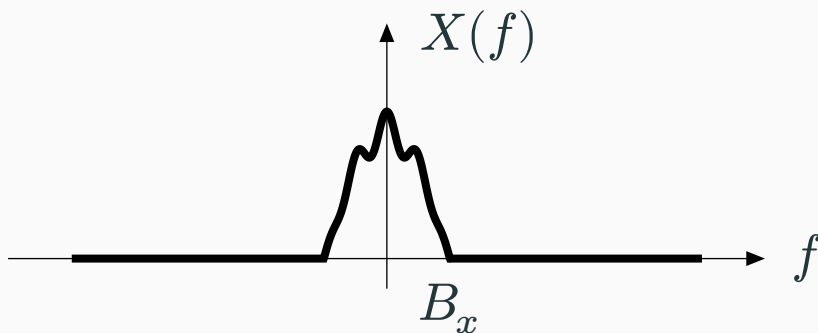
onde f_c é a frequência da portadora.



Espectro do sinal modulado

No domínio da frequência:

$$S(f) = \frac{1}{2}X(f + f_c) + \frac{1}{2}X(f - f_c).$$

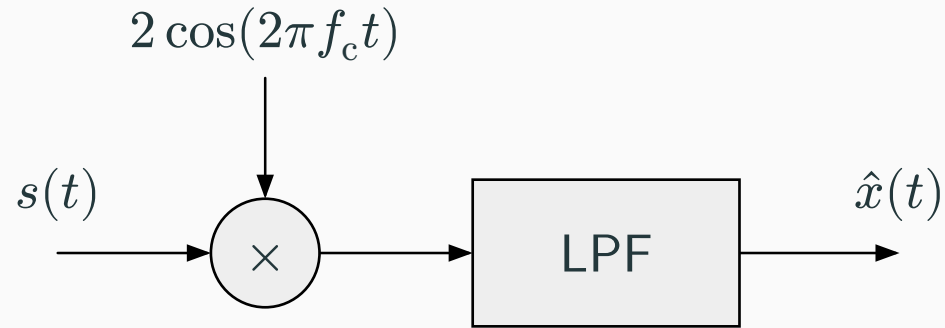


- Para que $x(t)$ seja recuperado a partir de $s(t)$, é necessário $f_c > B_x$ (na prática, $f_c \gg B_x$).
- A banda ocupada pelo sinal em banda passante é o dobro daquela do sinal em banda base:

$$B_s = 2B_x.$$

Demodulação do sinal DSB

A demodulação pode ser realizada como abaixo, onde LPF denota *filtragem passa-baixa*.



No domínio da frequência, a saída do multiplicador é

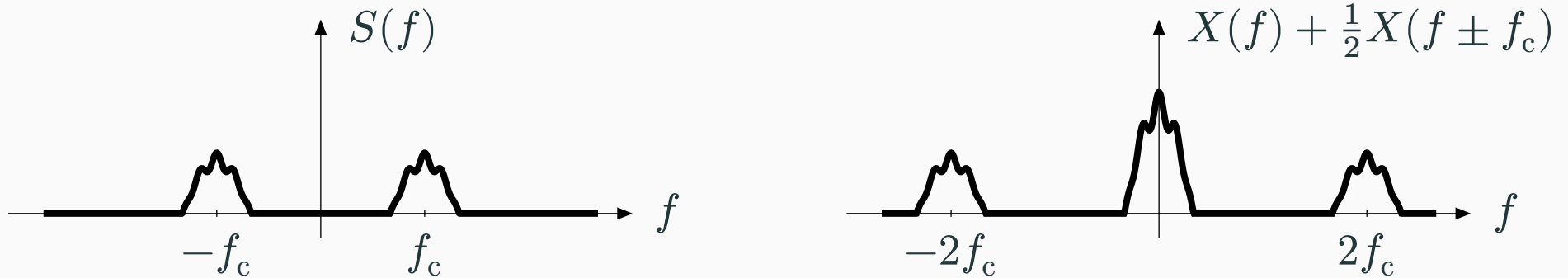
$$X(f) + \frac{1}{2}X(f + 2f_c) + \frac{1}{2}X(f - 2f_c).$$

Demodulação do sinal DSB

No domínio da frequência, a saída do multiplicador é

$$X(f) + \frac{1}{2}X(f + 2f_c) + \frac{1}{2}X(f - 2f_c).$$

Os termos em $\pm 2f_c$ são removidos pela filtragem passa-baixa.



A frequência de corte do filtro deve se situar entre B_x e $2f_c - B_x$.

Exercício 1

Mostre que:

(a) Se a diferença de fase entre os osciladores do receptor e transmissor é θ , então

$$\hat{x}(t) = x(t) \cos(\theta).$$

(b) Se a diferença de frequência entre os osciladores do receptor e transmissor é Δf , então

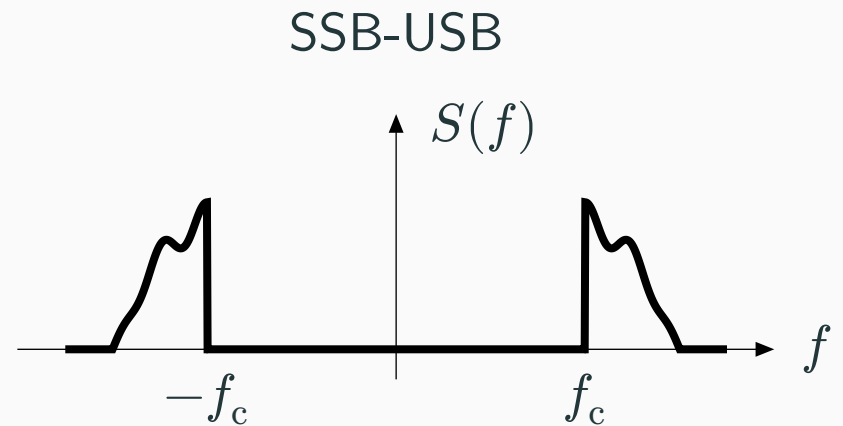
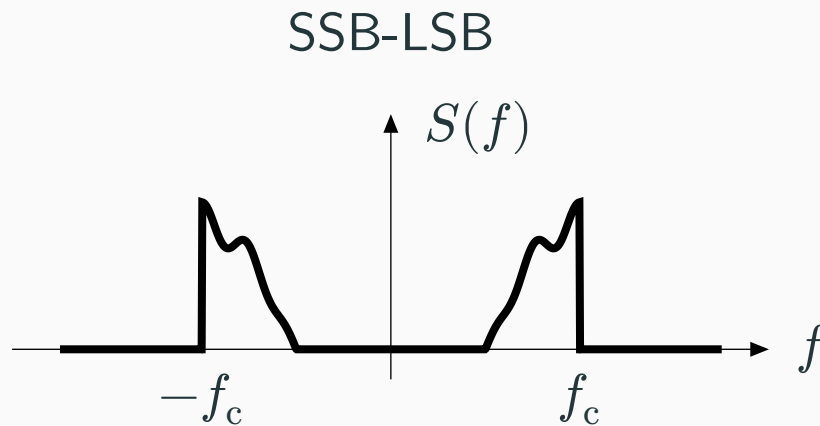
$$\hat{x}(t) = x(t) \cos(2\pi\Delta f t).$$

Observação: O problema de **sincronismo de portadora** pode ser resolvido de algumas maneiras:

- Portadora piloto: Transmite-se a portadora junto com $s(t)$.
- Malha de Costas (Costas loop): Utiliza técnicas de controle realimentado para recriar a portadora localmente a partir do próprio $s(t)$.

Modulação de banda lateral simples (SSB)

Na modulação de **banda lateral simples** (SSB), apenas uma das bandas laterais é selecionada: ou a LSB (banda lateral inferior) ou a USB (banda lateral superior).

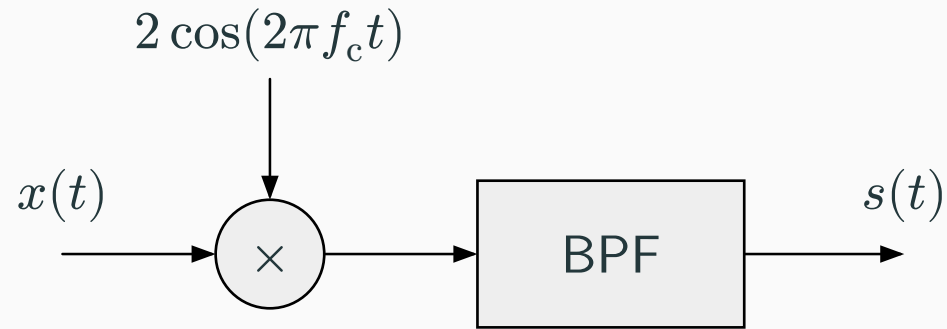


Assim, a banda ocupada pelo sinal em banda passante é a mesma do sinal em banda base:

$$B_s = B_x.$$

Diagrama de blocos

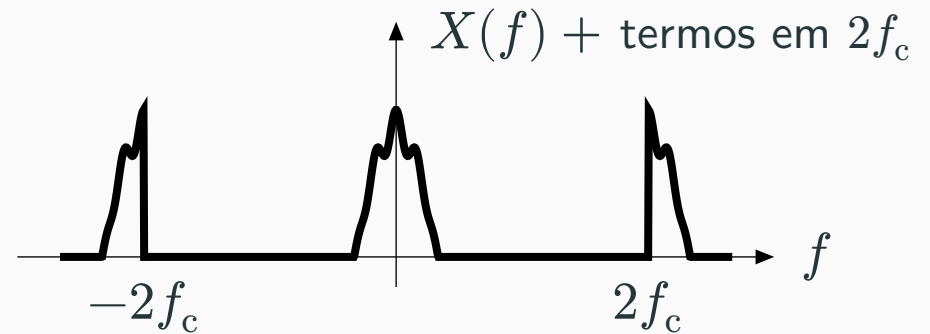
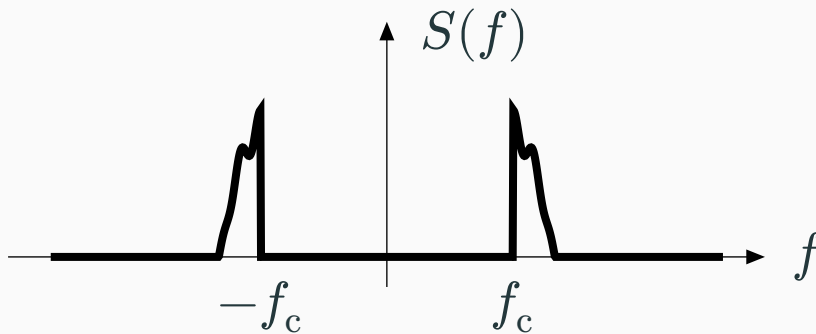
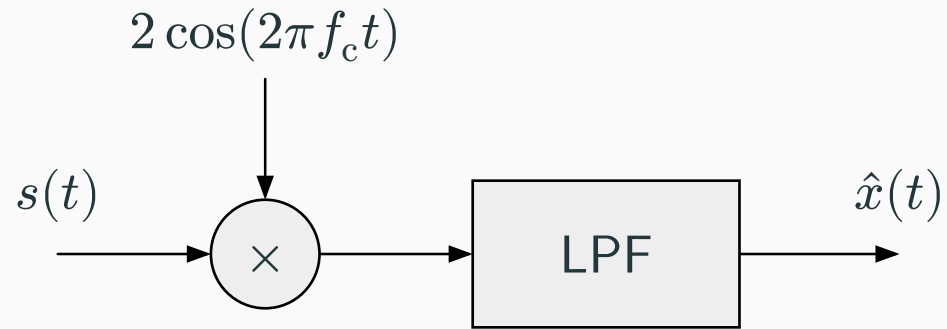
A modulação pode ser realizada através de um modulador DSB seguido de um filtro que seleciona a banda desejada.



Observação: Esta implementação exige um sinal modulante com baixo conteúdo espectral no DC.

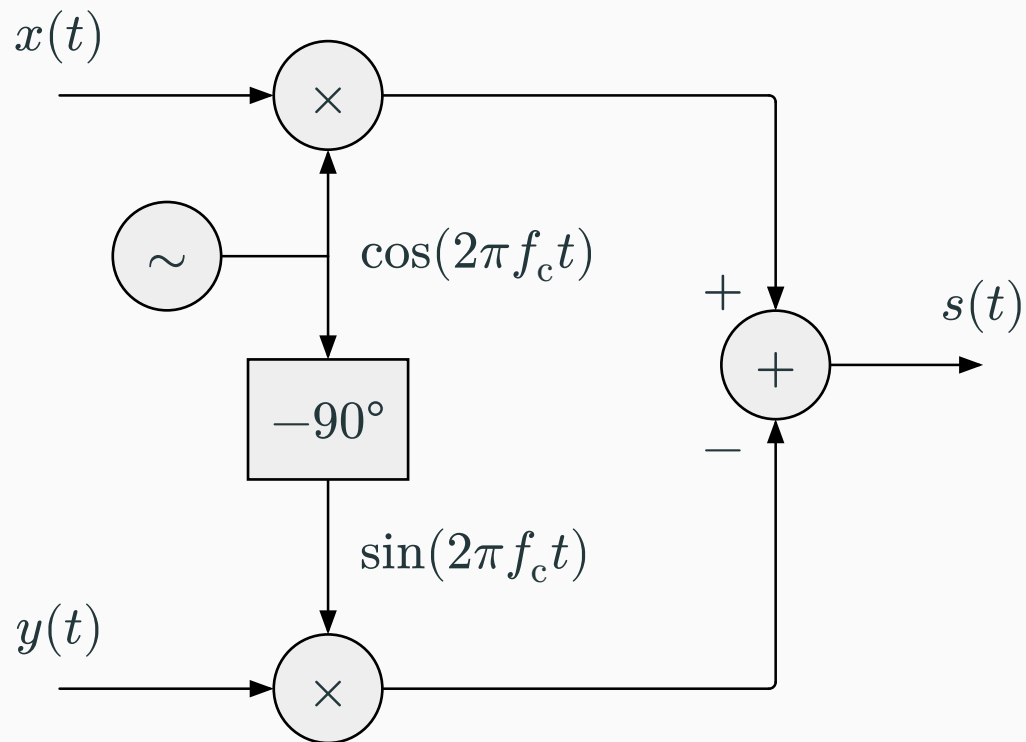
Demodulação do sinal SSB

Pode-se utilizar um demodulador DSB!



Modulação de portadora em quadratura (QC)

Na modulação de **portadora em quadratura** (QC), utiliza-se duas portadoras de mesma frequência, mas defasadas de 90° .



Modulação de portadora em quadratura (QC)

Matematicamente,

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \sin(2\pi f_c t),$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são dois sinais em banda base.

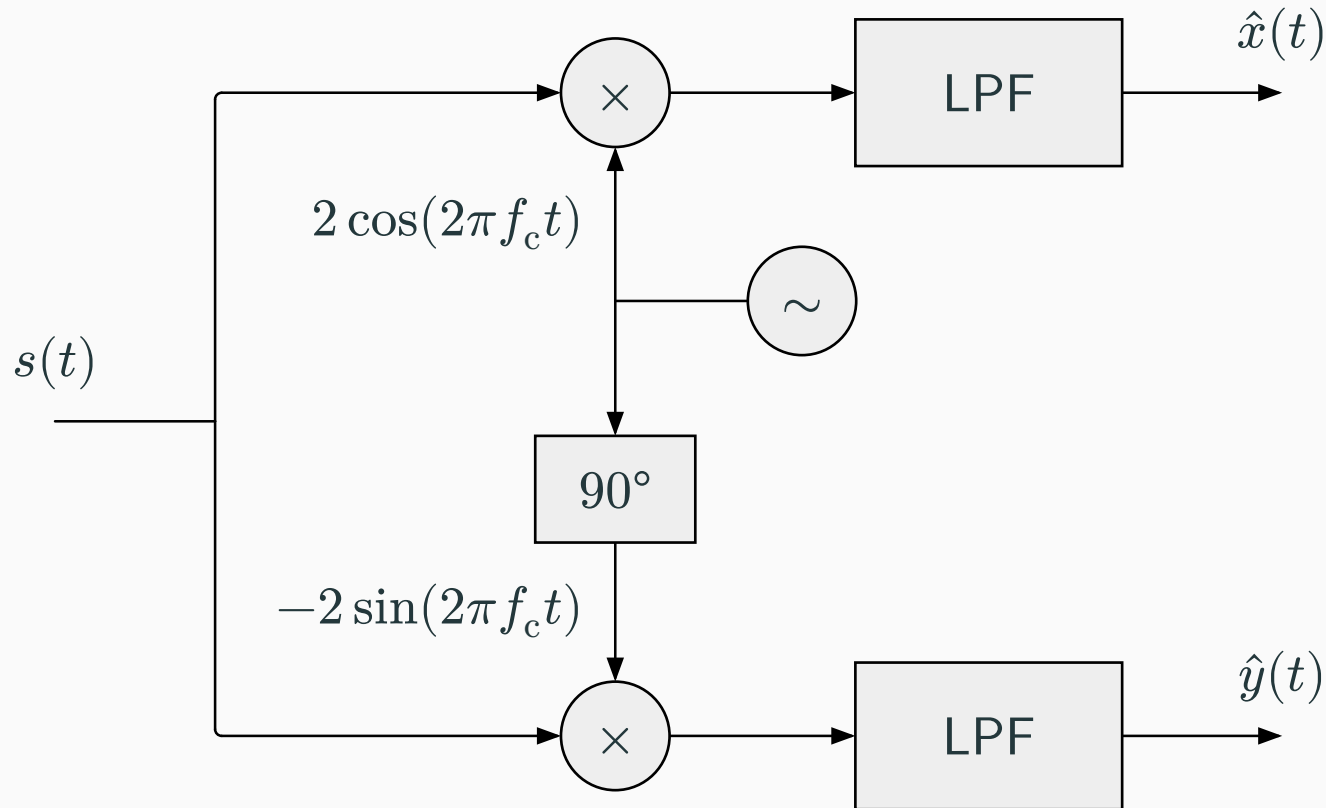
Nomenclatura: $x(t)$ é o **componente em fase** e $y(t)$ é o **componente em quadratura**.

A modulação QC ocupa a mesma largura de banda que o caso DSB. No entanto, dois sinais são transmitidos simultaneamente e na mesma faixa de frequência. Assim, a eficiência é a mesma do caso SSB.

Observação: Esta técnica é bastante usada em comunicação digital. Mais detalhes no futuro.

Demodulação do sinal QC

Utiliza-se dois demoduladores DSB, com portadoras em quadratura.



A saída do multiplicador do ramo de cima é

$$\begin{aligned}2s(t) \cos(2\pi f_c t) &= 2[x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \sin(2\pi f_c t)] \cos(2\pi f_c t) \\ &= 2x(t) \cos^2(2\pi f_c t) - 2y(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) \\ &= x(t) + x(t) \cos(2\pi 2f_c t) - y(t) \sin(2\pi 2f_c t),\end{aligned}$$

onde foram utilizadas as seguintes igualdades trigonométricas:

$$\begin{aligned}2 \cos^2(a) &= 1 + \cos(2a), \\ 2 \cos(a) \sin(a) &= \sin(2a).\end{aligned}$$

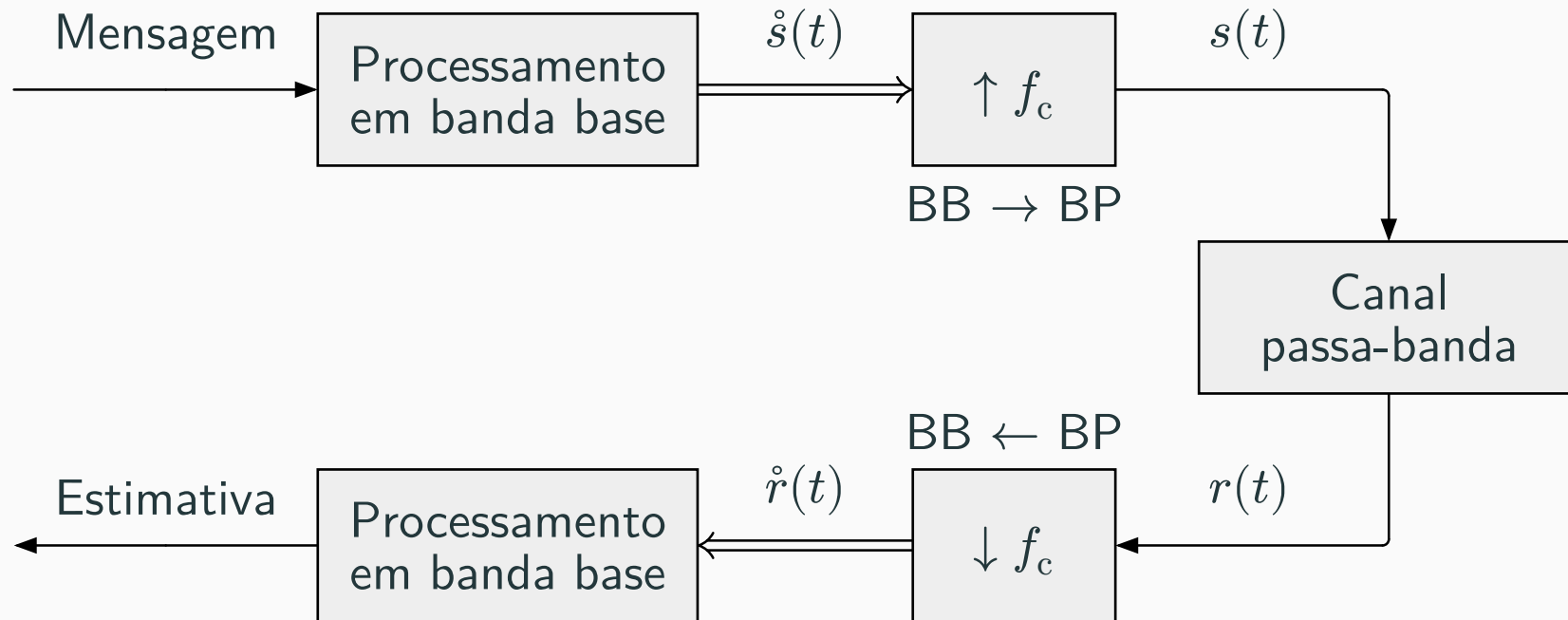
Portanto, na saída do filtro passa-baixa correspondente, temos $\hat{x}(t) = x(t)$.

Analogamente, no ramo de baixo, temos $\hat{y}(t) = y(t)$.

Envoltória complexa

Motivação

A envoltória complexa é uma generalização do conceito de *fasores* e permite a análise, a simulação e a implementação em banda base de grande parte do sistema.



Benefícios:

- Processamento em banda base independente da frequência da portadora.
- Processamento digital com menor taxa de amostragem.

Preço a se pagar:

- Os sinais envolvidos passam a ser complexos.

Relembrando fasores

Relembrando o conceito de **fasores** da teoria de análise de circuitos elétricos...

Fixe uma frequência (f_c).

Um fasor é um número complexo que representa **univocamente** uma senoide.

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta) \iff \mathring{s} = Ae^{j\theta}.$$

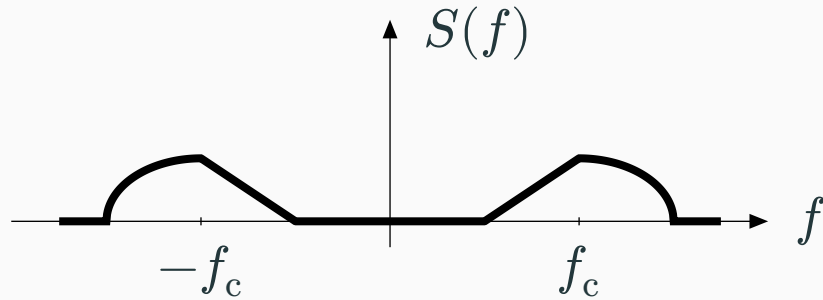
Para converter um fasor em senoide, multiplica-se por $e^{j2\pi f_c t}$ e toma-se a parte real:

$$\text{Re}\{\mathring{s} e^{j2\pi f_c t}\} = s(t).$$

Essa transformação preserva combinações lineares.

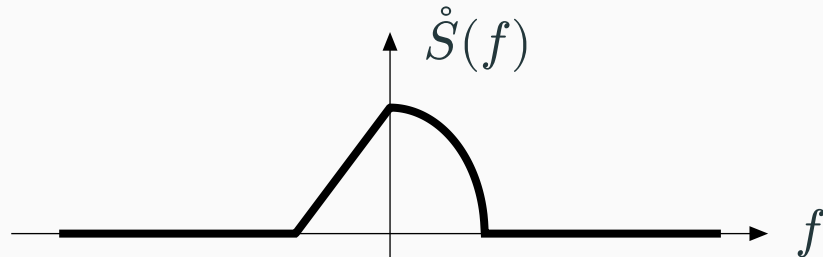
Representação em banda base de sinais em banda passante

Seja $s(t)$ um sinal real qualquer em *banda passante*.



$S(f)$ é sempre simétrico ao redor de $f = 0$, pois $s(t)$ é real, mas *não* é necessariamente simétrico ao redor de $f = f_c$.

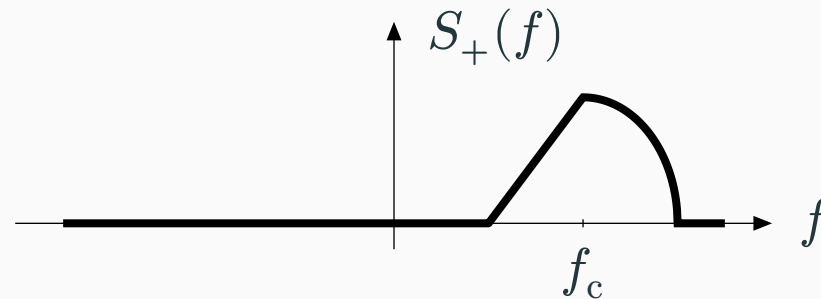
A **representação em banda base** (ou **envoltória complexa**) de $s(t)$ com relação à frequência f_c , denotada por $\hat{s}(t)$, é definida como sendo o sinal com o espectro abaixo.



Em geral, $\hat{s}(t)$ é um *sinal complexo*.

O sinal analítico

Matematicamente, primeiro definimos $S_+(f) = 2S(f)u(f)$, com o espectro abaixo.



No domínio do tempo,

$$s_+(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_+(f)\} = s(t) + js_H(t),$$

onde

$$s_H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}\{s(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

é a **transformada de Hilbert** de $s(t)$.

Demonstração

Tem-se

$$\begin{aligned} s_+(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{2S(f)u(f)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} \star \mathcal{F}^{-1}\{2u(f)\} \\ &= s(t) \star \left[\delta(t) + j\frac{1}{\pi t} \right] \\ &= s(t) + js(t) \star \frac{1}{\pi t}, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ■

Como consequência:

$$\operatorname{Re}\{\dot{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\} = s(t),$$

exatamente como na teoria de fasores.

Demonstração: Temos que

$$\dot{s}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{S}(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_+(f + f_c)\} = s_+(t)e^{-j2\pi f_c t},$$

ou seja,

$$\dot{s}(t)e^{j2\pi f_c t} = s_+(t),$$

e o resultado segue tomando a parte real dos dois lados da equação. ■

Representação retangular: componentes em fase e em quadratura

Expressando $\dot{s}(t)$ em coordenadas retangulares, obtemos

$$\dot{s}(t) = x(t) + jy(t),$$

onde

- $x(t) = \text{Re}\{\dot{s}(t)\}$ é o **componente em fase** de $s(t)$
- $y(t) = \text{Im}\{\dot{s}(t)\}$ é o **componente em quadratura** de $s(t)$.

Pode-se mostrar então que

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \sin(2\pi f_c t),$$

ou seja, modulação de **portadora em quadratura (QC)**!

Observação: Os termos em inglês são *in-phase* (I) e *quadrature* (Q). Não confundir o I com “imaginário”.

Representação polar: amplitude e fase instantâneas

Expressando $\dot{s}(t)$ em coordenadas polares, obtemos

$$\dot{s}(t) = a(t)e^{j\theta(t)},$$

onde

- $a(t) = |\dot{s}(t)|$ é a **amplitude instantânea** de $s(t)$ e
- $\theta(t) = \angle \dot{s}(t)$ é a **fase instantânea** de $s(t)$.

Nesse caso,

$$s(t) = a(t) \cos(2\pi f_c t + \theta(t)).$$

Observação: A amplitude instantânea $a(t)$ também é chamada de *envoltória* de $s(t)$. Não confundir com a *envoltória complexa* de $s(t)$, que é $\dot{s}(t)$.

Demonstração

Da relação fasorial, temos que primeiro que

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re}\{\dot{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{[x(t) + jy(t)][\cos(2\pi f_c t) + j\sin(2\pi f_c t)]\} \\ &= x(t)\cos(2\pi f_c t) - y(t)\sin(2\pi f_c t), \end{aligned}$$

e depois que

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re}\{\dot{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{a(t)e^{j\theta(t)}e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{a(t)e^{j(2\pi f_c t + \theta(t))}\} \\ &= a(t)\cos(2\pi f_c t + \theta(t)), \end{aligned}$$

como desejado. ■

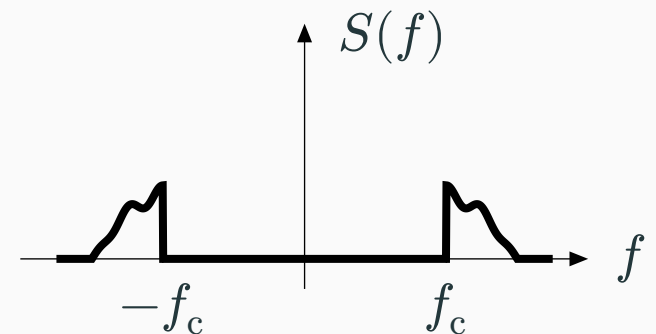
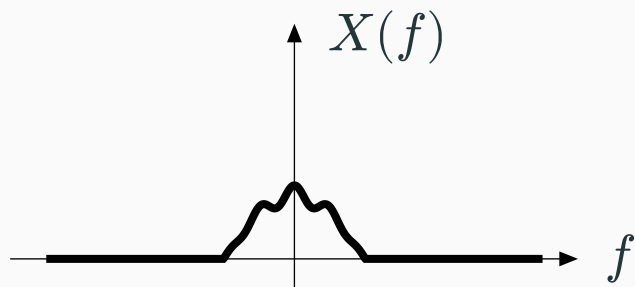
Modulador SSB alternativo

A ideia é considerar como sinal em banda base

$$\dot{s}(t) = x_+(t) = x(t) + jx_H(t),$$

pois sabemos que

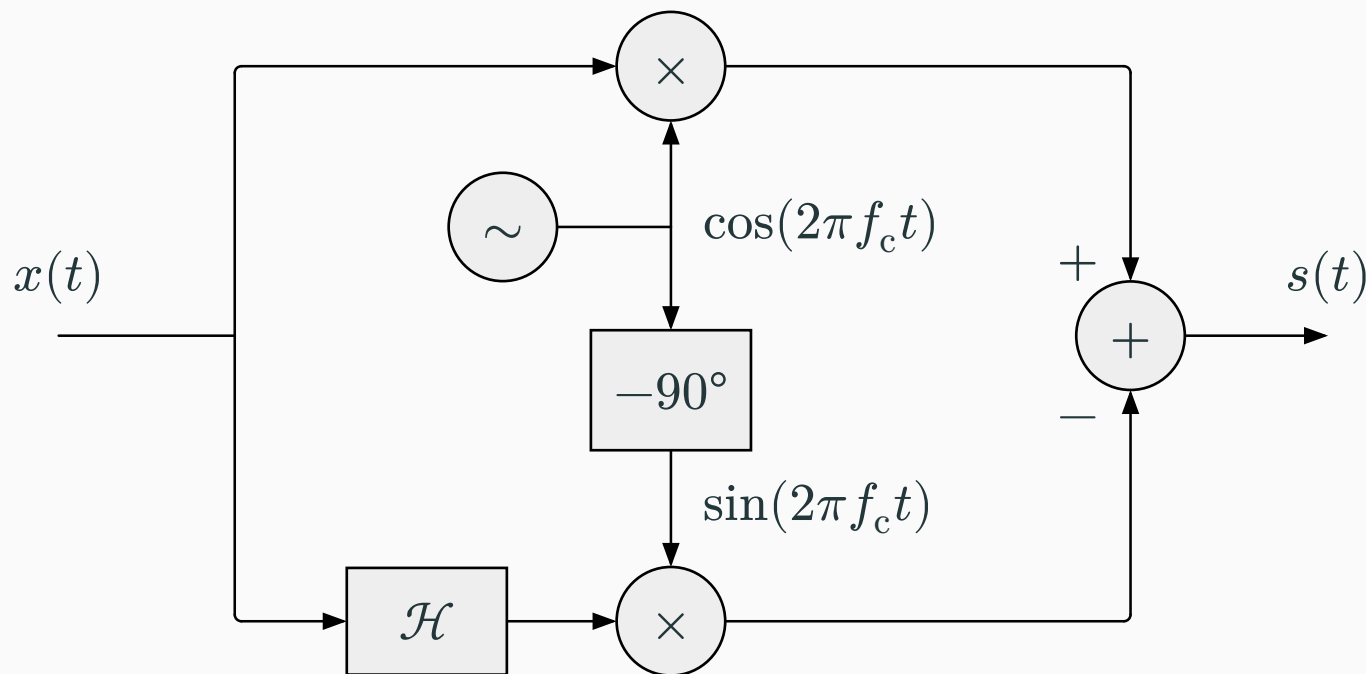
$$X_+(f) = 2X(f)u(f).$$



Modulador SSB alternativo

Assim, o sinal $s(t)$ modulado em SSB-USB pode ser obtido utilizando um modulador QC, com componente em fase $x(t)$ e componente em quadratura $x_H(t)$, e portanto

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) - x_H(t) \sin(2\pi f_c t).$$



Exercício 2

Analise o caso SSB-LSB.

Referências

Referências

- [1] R. G. Gallager, *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press, 2008.
- [2] S. Haykin, *Communication Systems*, 4^o ed. John Wiley & Sons, 2001.
- [3] B. P. Lathi e Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4^o ed. Oxford University Press, 2009.
- [4] J. G. Proakis e M. Salehi, *Digital Communications*, 5^o ed. McGraw Hill, 2008.