

Processos Estocásticos

Revisão: Variáveis aleatórias

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



**INSTITUTO
FEDERAL**
Santa Catarina

Câmpus
São José

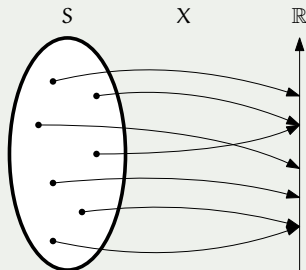
Definição

Definição de variável aleatória (geral)

Seja S o espaço amostral de um experimento probabilístico.

Definição

Uma **variável aleatória (VA)** real é um mapeamento $X : S \rightarrow \mathbb{R}$.



A **imagem** de X , denotada por S_X , é chamada de **espaço amostral da VA**.



Símbolo	Significado
X	Variável aleatória.
x	Possível valor assumido por X .
S_X	Imagem ou espaço amostral de X .



Cuidado! Alguns autores (Albuquerque et al., por exemplo) invertem a convenção, utilizando minúsculas para variáveis aleatórias e maiúsculas para os possíveis valores!



Exemplo 1

Experimento Acoplar um foto-detector em uma fibra óptica e contar o número de fótons que chegam em um intervalo de $1 \mu\text{s}$.

Espaço amostral $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Variável aleatória $X =$ número de fótons contado.

Espaço amostral da VA $S_X = S$.



Nesse caso, a VA X é o próprio resultado do experimento.



Exemplo 2

Experimento Testar seis CIs e observar se cada CI está operacional (1) ou defeituoso (0).

Espaço amostral $S = \{000000, 000001, 000010, \dots, 111111\}$.

Variável aleatória $X = \text{número de CIs operacionais}$.

Espaço amostral da VA $S_X = \{0, 1, \dots, 6\}$.

Variável aleatória $Y = \text{lucro obtido, sabendo que o custo de fabricação é \$1 e que o preço de venda é \$3}$.

Espaço amostral da VA $S_Y = \{-6, -3, 0, 3, 6, 9, 12\}$.



Aqui, a variável aleatória X é uma função do resultado do experimento e a variável aleatória Y é uma função de X .



Exemplos

- N = Número de mensagens de WhatsApp recebidas durante esta aula.
- T = Tempo decorrido até receber a próxima mensagem de WhatsApp.

Definição

Uma variável aleatória X é dita ser:

- **discreta**, se seu espaço amostral é um *conjunto enumerável*:

$$S_X = \{x_1, x_2, \dots\}.$$

- **contínua**, se seu espaço amostral é um *intervalo* ou uma *união de intervalos* reais e se $\Pr[X = x] = 0, \forall x \in S_X$.



VAs discretas e PMF

Definição

A **função massa de probabilidade (PMF)** de uma VA discreta X é dada por

$$p_X(x) = \Pr[X = x], \quad \forall x \in S_X.$$



A PMF especifica completamente uma VA discreta.

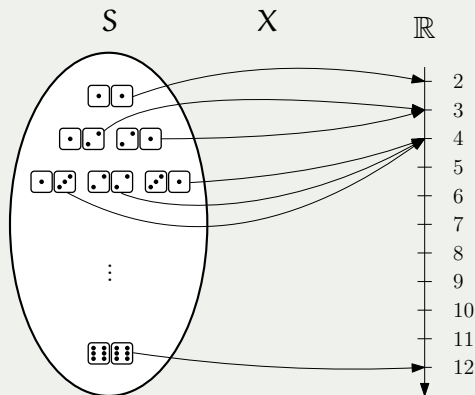
Proposição:

$$\Pr[X \in A] = \sum_{x \in A} p_X(x).$$



Exemplo: Soma de dois dados

Dois dados honestos são lançados. Seja X a soma dos valores obtidos.



O **espaço amostral** de X é dado por $S_X = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$.



Exemplo: Soma de dois dados

Dois dados honestos são lançados. Seja X a soma dos valores obtidos.

A **PMF** de X é dada por

$$p_X(2) = \Pr[X = 2] = \Pr[\boxed{\cdot}\boxed{\cdot}] = \frac{1}{36}$$

$$p_X(3) = \Pr[X = 3] = \Pr[\boxed{\cdot}\boxed{\cdot} \cup \boxed{\cdot}\boxed{\cdot}] = \frac{2}{36}$$

$$p_X(4) = \Pr[X = 4] = \Pr[\boxed{\cdot}\boxed{\cdot} \cup \boxed{\cdot}\boxed{\cdot} \cup \boxed{\cdot}\boxed{\cdot}] = \frac{3}{36}$$

$$\vdots$$

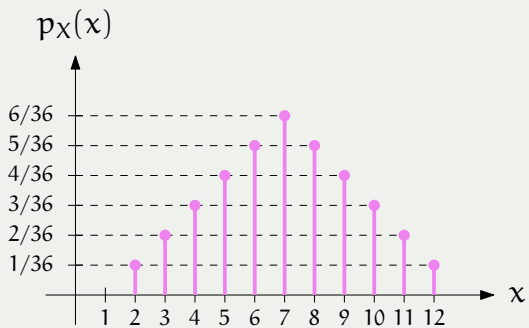
$$p_X(12) = \Pr[X = 12] = \Pr[\boxed{\cdot\cdot\cdot}\boxed{\cdot\cdot\cdot}] = \frac{1}{36}$$



Exemplo: Soma de dois dados

Dois dados honestos são lançados. Seja X a soma dos valores obtidos.

A **PMF** de X é dada por

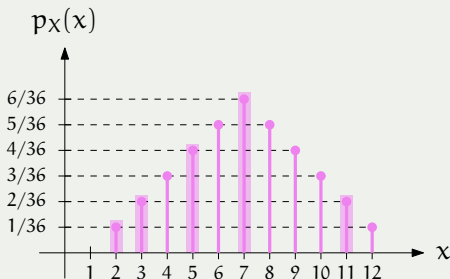


Exemplo: Soma de dois dados

Dois dados honestos são lançados. Seja X a soma dos valores obtidos.

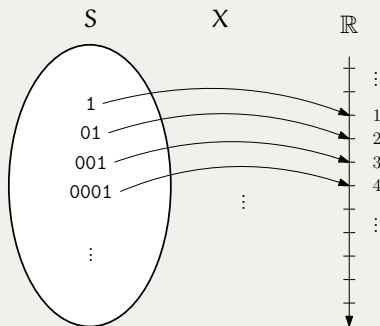
Se P é o conjunto dos números primos, então

$$\Pr[X \in P] = \underbrace{p_X(2)}_{1/36} + \underbrace{p_X(3)}_{2/36} + \underbrace{p_X(5)}_{4/36} + \underbrace{p_X(7)}_{6/36} + \underbrace{p_X(11)}_{2/36} \approx 41,67\%.$$



Exemplo: Enlace de comunicação digital

Considere um enlace de comunicação cuja probabilidade de sucesso (1) na recepção de um pacote é de $2/3$; em caso de falha (0) na recepção, é solicitado o reenvio do pacote. Assuma transmissões independentes. Seja X o número necessário de transmissões para que um pacote seja recebido corretamente.



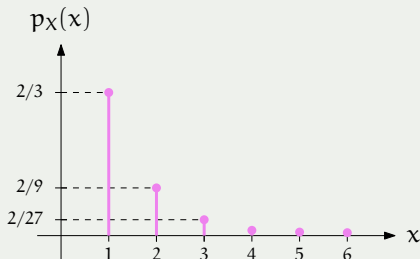
O **espaço amostral** de X é dado por $S_X = \{1, 2, 3, \dots\}$.



Exemplo: Enlace de comunicação digital

Considere um enlace de comunicação cuja probabilidade de sucesso (1) na recepção de um pacote é de $2/3$; em caso de falha (0) na recepção, é solicitado o reenvio do pacote. Assuma transmissões independentes. Seja X o número necessário de transmissões para que um pacote seja recebido corretamente.

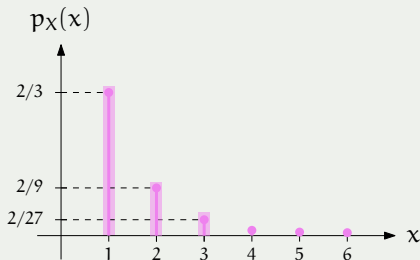
$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}, & x = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Exemplo: Enlace de comunicação digital

Considere um enlace de comunicação cuja probabilidade de sucesso (1) na recepção de um pacote é de $2/3$; em caso de falha (0) na recepção, é solicitado o reenvio do pacote. Assuma transmissões independentes. Seja X o número necessário de transmissões para que um pacote seja recebido corretamente.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}, & x = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



A probabilidade de o pacote ser recebido em 3 transmissões ou menos é:

$$\Pr[X \leq 3] = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = 2/3 + 2/9 + 2/27 \approx 96,30\%.$$



Propriedades da PMF

1 $0 \leq p_X(x) \leq 1, \forall x \in S_X.$

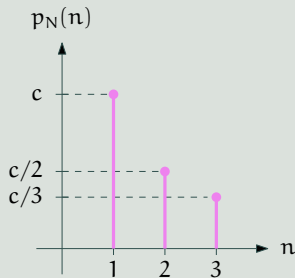
2 $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = 1.$

Exemplo

Seja N uma VA discreta com PMF dada por

$$p_N(n) = \begin{cases} c/n, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c ?



Propriedades da PMF

1 $0 \leq p_X(x) \leq 1, \forall x \in S_X.$

2 $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = 1.$

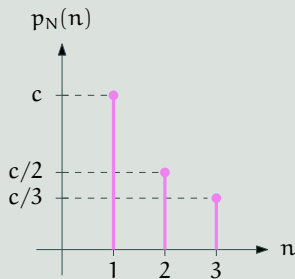
Exemplo

Seja N uma VA discreta com PMF dada por

$$p_N(n) = \begin{cases} c/n, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c ?

$$c + c/2 + c/3 = 1 \implies c = 6/11$$



Propriedades da PMF

1 $0 \leq p_X(x) \leq 1, \forall x \in S_X.$

2 $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = 1.$

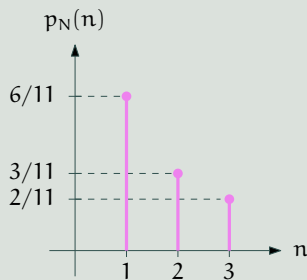
Exemplo

Seja N uma VA discreta com PMF dada por

$$p_N(n) = \begin{cases} c/n, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c ?

$$c + c/2 + c/3 = 1 \implies c = 6/11$$



VAs contínuas e PDF

Definição

A **PMF** de uma VA discreta X é dada por

$$p_X(x) = \Pr[X = x], \quad \forall x \in S_X.$$



Para VAs contínuas, $\Pr[X = x] = 0$ para todo $x \in S_X$!

Como contornar o problema? Ideia: se inspirar na seguinte propriedade:

$$\Pr[X \in A] = \sum_{x \in A} p_X(x).$$



Definição

A **função densidade de probabilidade (PDF)** de uma VA contínua X , denotada por f_X , é tal que

$$\Pr[X \in A] = \int_{x \in A} f_X(x) dx,$$

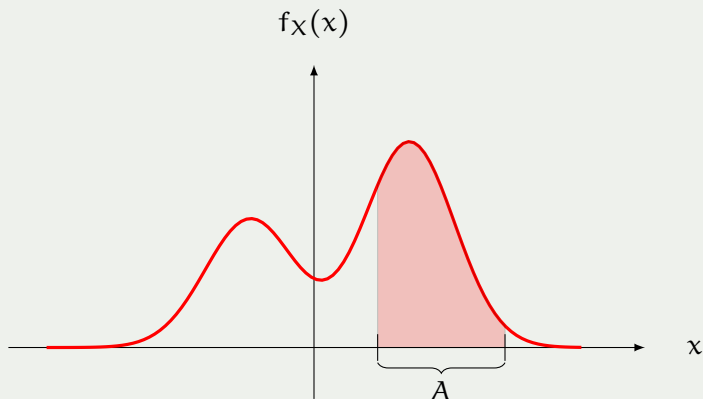
para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.



A PDF especifica completamente a VA.

Caso particular: $\Pr[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx.$





$$\Pr[X \in A] = \int_{x \in A} f_X(x) dx$$

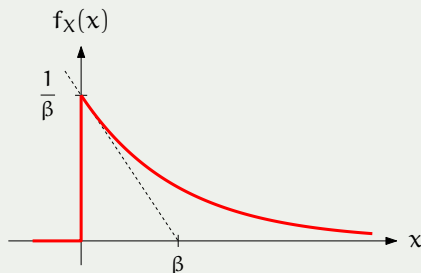


Exemplo: Probabilidade de outage

Um modelo bastante empregado em comunicações sem-fio considera que a potência do sinal recebido é uma VA X com PDF

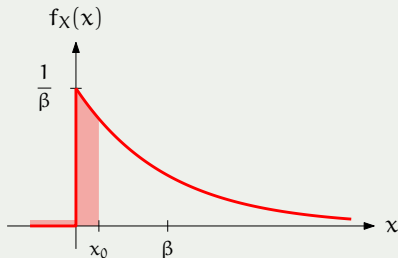
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} u(x),$$

onde β é a *potência média* recebida.



Exemplo: Probabilidade de outage

Define-se **outage** como o evento em que a potência recebida é inferior a dado *limiar* x_0 , impossibilitando o funcionamento do sistema.



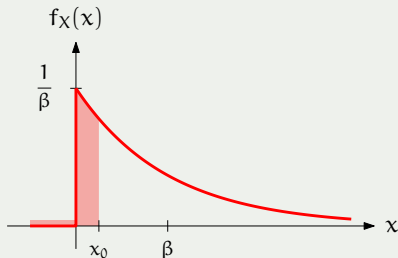
$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} u(x)$$

Determine a probabilidade de outage supondo $\beta = 100 \text{ mW}$ e $x_0 = 10 \text{ mW}$.



Exemplo: Probabilidade de outage

Define-se **outage** como o evento em que a potência recebida é inferior a dado *limiar* x_0 , impossibilitando o funcionamento do sistema.



$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} u(x)$$

Determine a probabilidade de outage supondo $\beta = 100$ mW e $x_0 = 10$ mW.

$$\begin{aligned} \Pr[X \leq x_0] &= \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x) dx = \int_0^{x_0} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} dx \\ &= \left[-e^{-x/\beta} \right]_{x=0}^{x=x_0} = 1 - e^{-x_0/\beta} = 1 - e^{-0,1} \approx 9,52 \%. \end{aligned}$$



1 $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

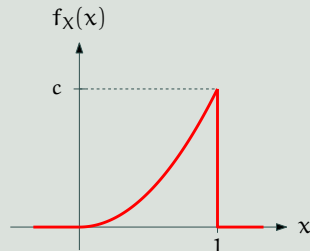
2 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$

Exemplo

Seja X uma VA contínua com PDF dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c ?



1 $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

2 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$

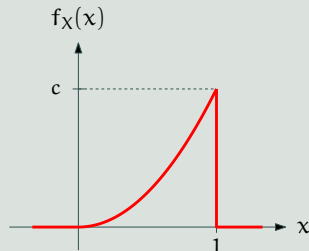
Exemplo

Seja X uma VA contínua com PDF dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c ?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 cx^2 dx = c \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{c}{3}.$$



1 $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

2 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$

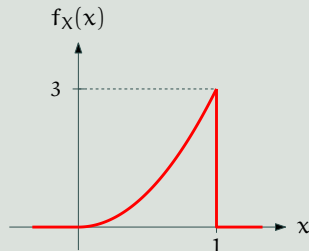
Exemplo

Seja X uma VA contínua com PDF dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c ?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{c}{3} = 1 \quad \implies \quad c = 3.$$



Função de distribuição cumulativa

Definição da CDF

A CDF é válida para **todos** os tipos de VAs.

Definição

A **função de distribuição cumulativa (CDF)** de uma VA é dada por

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



A CDF especifica completamente a VA.



Definição da CDF

A CDF é válida para **todos** os tipos de VAs.

Definição

A **função de distribuição cumulativa (CDF)** de uma VA é dada por

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Caso discreto. CDF $\longleftrightarrow$ PMF:

$$F_X(x) = \sum_{u \leq x} p_X(u) \quad \text{e} \quad p_X(x) = F_X(x^+) - F_X(x^-).$$



Definição da CDF

A CDF é válida para **todos** os tipos de VAs.

Definição

A **função de distribuição cumulativa (CDF)** de uma VA é dada por

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Caso discreto. CDF $\longleftrightarrow$ PMF:

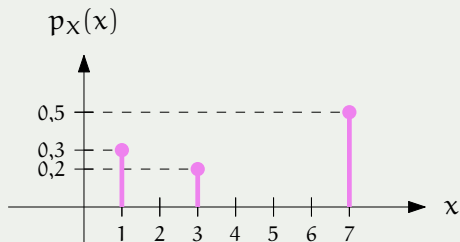
$$F_X(x) = \sum_{u \leq x} p_X(u) \quad \text{e} \quad p_X(x) = F_X(x^+) - F_X(x^-).$$

Caso contínuo. CDF $\longleftrightarrow$ PDF:

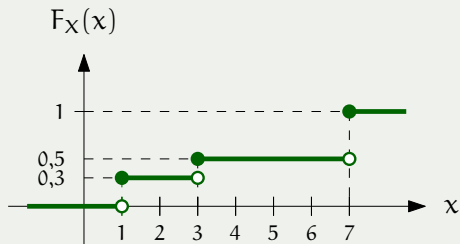
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad \text{e} \quad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x).$$



Exemplo: Caso discreto



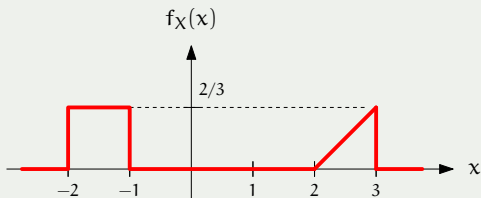
$$p_X(x) = \begin{cases} 0,3, & x = 1, \\ 0,2, & x = 3, \\ 0,5, & x = 7, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



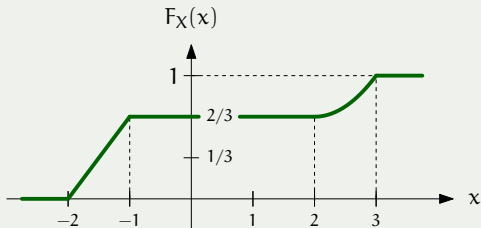
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0,3, & 1 \leq x < 3, \\ 0,5, & 3 \leq x < 7, \\ 1, & x \geq 7. \end{cases}$$



Exemplo: Caso contínuo



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & -2 < x < -1, \\ \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}, & 2 < x < 3, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}, & -2 \leq x < -1, \\ \frac{2}{3}, & -1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$



- 1 $0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$
- 2 $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(\infty) = 1.$
- 3 F_X é não-decrescente: $x_1 < x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2).$
- 4 Se X é uma VA discreta:
 F_X é uma função constante-por-partes (“escadinha”),
 F_X é uma função contínua-à-direita: $F_X(x) = F_X(x^+).$
- 5 Se X é uma VA contínua:
 F_X é uma função contínua (no sentido do cálculo).



Exercícios propostos

- 3.2.3.
- 3.3.1.
- 3.3.5.
- 3.3.7.
- 3.4.1.
- 4.2.2.
- 4.3.1.



Esboce sua resposta sempre que possível.



Referências



STEVEN M. KAY.

INTUITIVE PROBABILITY AND RANDOM PROCESSES USING MATLAB®.

Springer, 2006.



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.

PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.

Wiley, 3rd edition, 2014.

