

Processos Estocásticos

Variáveis aleatórias mistas

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



**INSTITUTO
FEDERAL**
Santa Catarina

Câmpus
São José

Função impulso

Definição

A **função impulso unitário** ou **função delta de Dirac** é definida como

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d_{\epsilon}(x),$$

onde

$$d_{\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & -\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

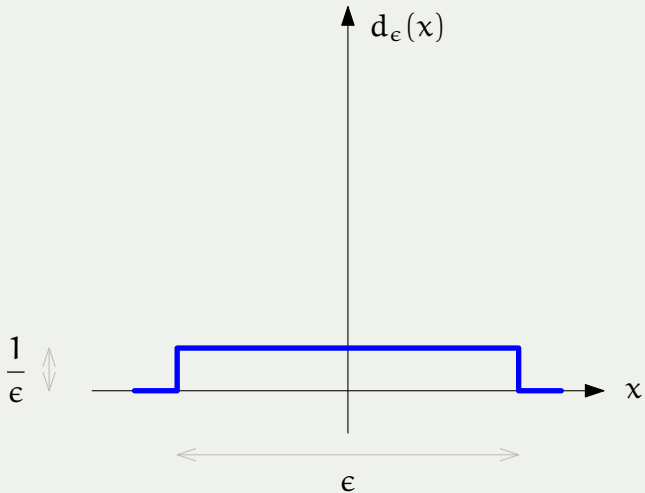
é um retângulo centrado na origem de largura ϵ e altura $1/\epsilon$.



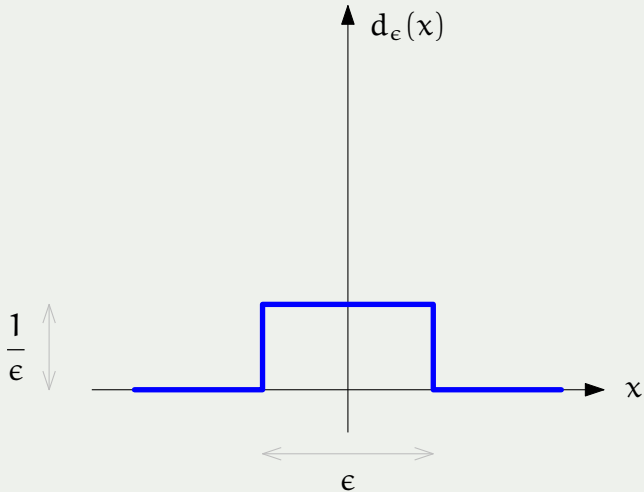
P.A.M. Dirac
(1902–1984)



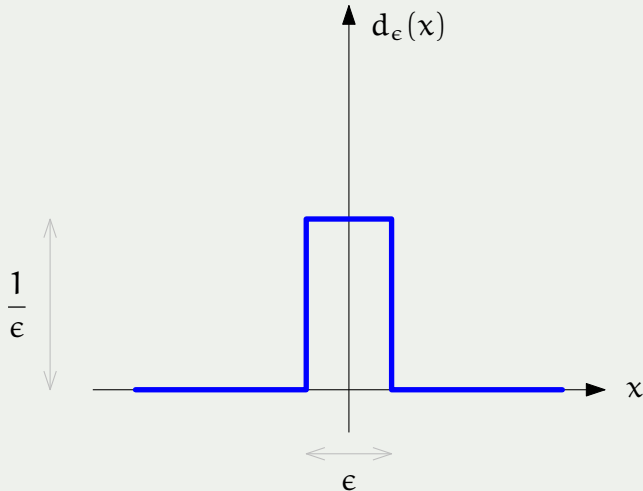
Função impulso: Ilustração



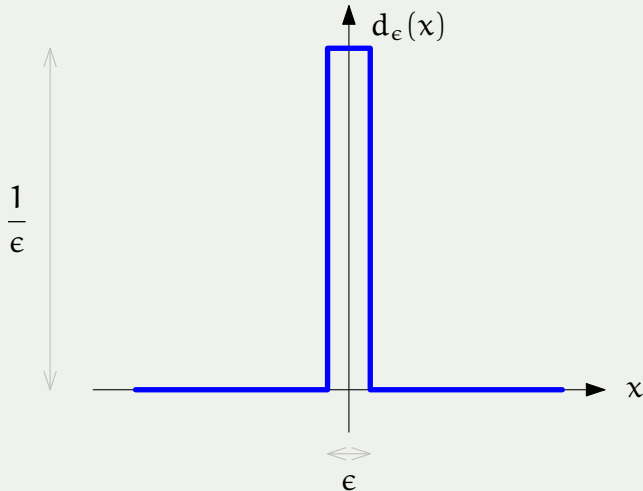
Função impulso: Ilustração



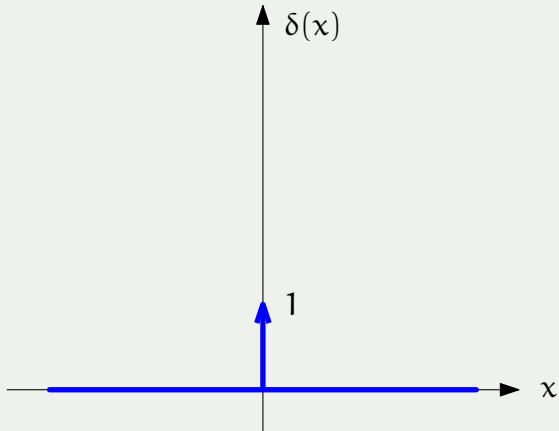
Função impulso: Ilustração



Função impulso: Ilustração

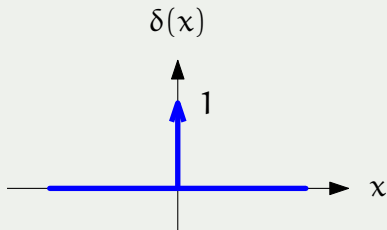


Função impulso: Ilustração



Função impulso: Propriedades

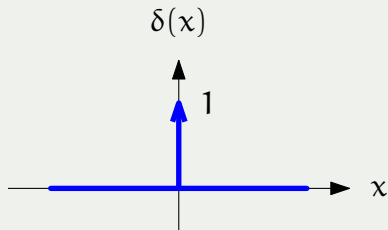
$$1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$



Função impulso: Propriedades

$$1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$

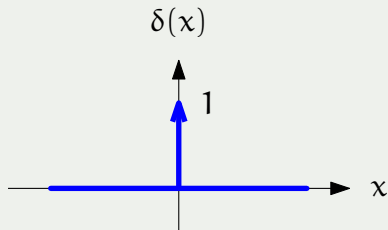
$$2 \quad \int_{-\infty}^x \delta(v) dv$$



Função impulso: Propriedades

$$1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$

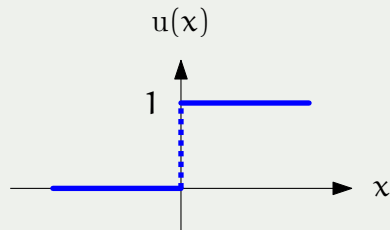
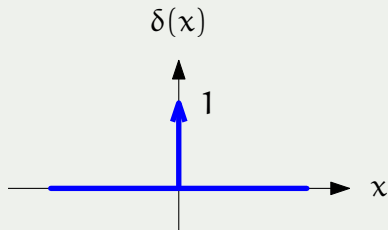
$$2 \quad \int_{-\infty}^x \delta(v) dv = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$



Função impulso: Propriedades

$$1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$

$$2 \quad \int_{-\infty}^x \delta(v) dv = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} = u(x)$$

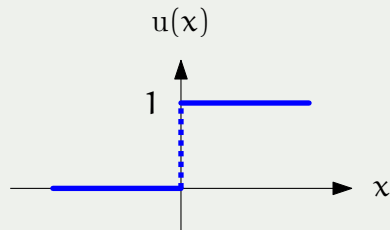
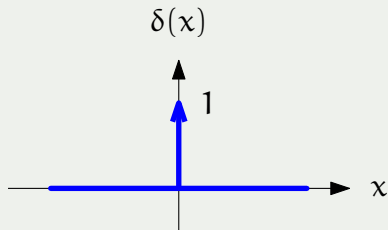


Função impulso: Propriedades

$$1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$

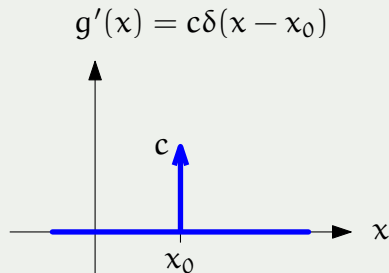
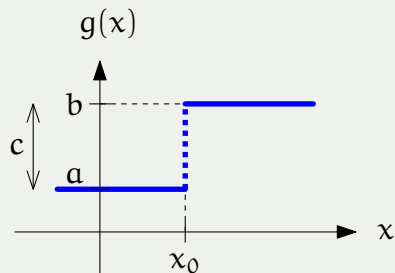
$$2 \quad \int_{-\infty}^x \delta(v) dv = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} = u(x)$$

$$3 \quad \frac{d}{dx} u(x) = u'(x) = \delta(x)$$



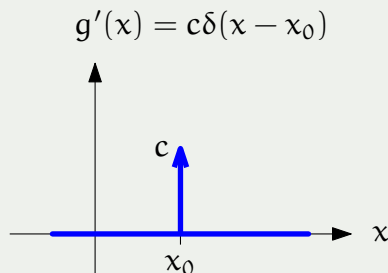
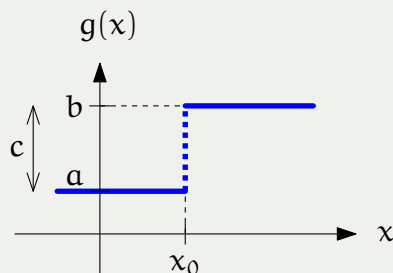
Função impulso: Propriedades

Generalizando:



Função impulso: Propriedades

Generalizando:



A derivada de uma **descontinuidade** de salto c é um **impulso** de área c .



PDF para VAs discretas

É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.



É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(\{1, \dots, 6\})$. Determine a PDF de X .

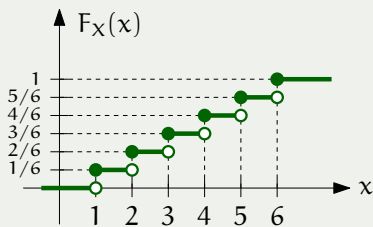
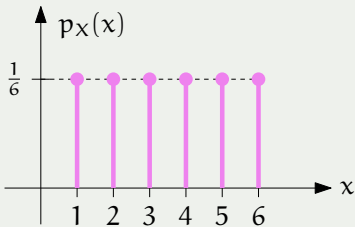


É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(\{1, \dots, 6\})$. Determine a PDF de X .

Já conhecemos a PMF e a CDF de X :

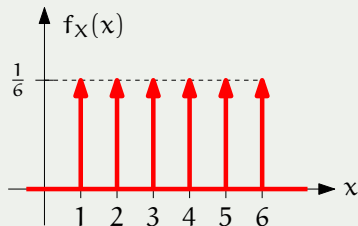
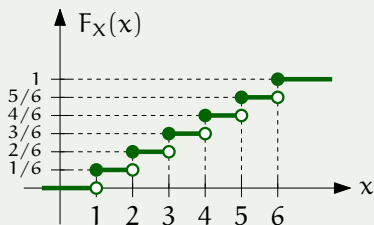


É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(\{1, \dots, 6\})$. Determine a PDF de X .

Sabendo que $f_X(x) = F'_X(x)$, obtemos a PDF de X :



É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(\{1, \dots, 6\})$. Determine a PDF de X .

Algebricamente:

$$f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{6}\delta(x-2) + \dots + \frac{1}{6}\delta(x-6)$$



É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(\{1, \dots, 6\})$. Determine a PDF de X .

Algebricamente:

$$f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{6}\delta(x-2) + \dots + \frac{1}{6}\delta(x-6)$$

De modo geral:

$$f_X(x) = \sum_{u \in S_X} p_X(u)\delta(x-u)$$



É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(\{1, \dots, 6\})$. Determine a PDF de X .

Algebricamente:

$$f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{6}\delta(x-2) + \dots + \frac{1}{6}\delta(x-6)$$

De modo geral:

$$f_X(x) = \sum_{u \in S_X} p_X(u)\delta(x-u)$$



Basta substituir **massas** por **impulsos**.



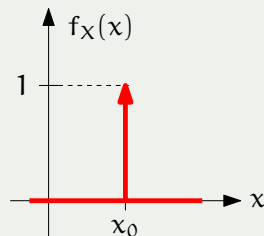
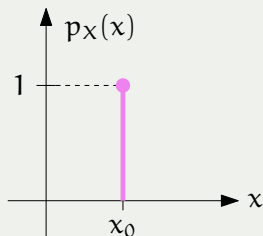
Exemplo

Seja $X = x_0$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante (i.e., X é uma variável aleatória determinística). Determine a PDF de X .



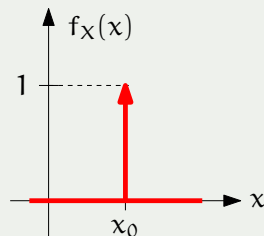
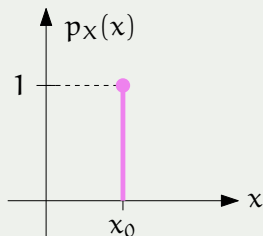
Exemplo

Seja $X = x_0$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante (i.e., X é uma variável aleatória determinística). Determine a PDF de X .



Exemplo

Seja $X = x_0$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante (i.e., X é uma variável aleatória determinística). Determine a PDF de X .



$$f_X(x) = \delta(x - x_0)$$



Variáveis aleatórias mistas

Definição

Uma **variável aleatória mista** é uma VA que possui *parte discreta* e *parte contínua*.



Definição

Uma **variável aleatória mista** é uma VA que possui *parte discreta* e *parte contínua*.



A PDF de uma VA mista possui tanto **impulsos** quanto trechos de **densidade finita**.



Definição

Uma **variável aleatória mista** é uma VA que possui *parte discreta* e *parte contínua*.



A PDF de uma VA mista possui tanto **impulsos** quanto trechos de **densidade finita**.



A CDF de uma VA mista possui tanto **descontinuidades** quanto trechos contínuos **estritamente crescentes**.



Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}(0, 4)$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \text{Uniform}(0, 2)$.
- Caso contrário, então $X \sim \text{Bernoulli}(2/3)$.

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de X .

Determine também $\Pr[X > 1]$ e $\Pr[X \geq 1]$.

Intuição:

U	3.34	3.78	3.12	3.30	0.43	3.27	3.37	3.65	1.72	2.27	1.49	0.33	2.72	1.91	1.45	0.85	1.14	0.10
X	1.00	0.00	0.00	1.00	0.83	0.00	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.37	1.00	1.00	1.00	1.04	1.00	1.38



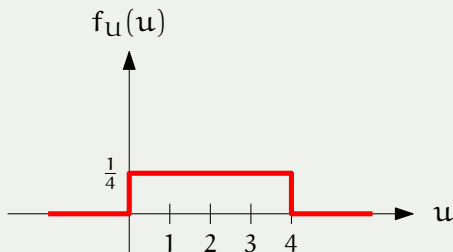
Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}(0, 4)$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \text{Uniform}(0, 2)$.
- Caso contrário, então $X \sim \text{Bernoulli}(2/3)$.

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de X .

Determine também $\Pr[X > 1]$ e $\Pr[X \geq 1]$.



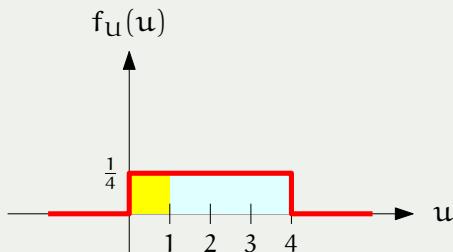
Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}(0, 4)$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \text{Uniform}(0, 2)$.
- Caso contrário, então $X \sim \text{Bernoulli}(2/3)$.

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de X .

Determine também $\Pr[X > 1]$ e $\Pr[X \geq 1]$.



$$\Pr[U \leq 1] = \frac{1}{4}$$

$$\Pr[U > 1] = \frac{3}{4}$$



Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}(0, 4)$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \text{Uniform}(0, 2)$.
- Caso contrário, então $X \sim \text{Bernoulli}(2/3)$.

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de X .

Determine também $\Pr[X > 1]$ e $\Pr[X \geq 1]$.

PDF:

Pelo **teorema da probabilidade total**:

$$f_X(x) = f_X(x \mid U \leq 1) \Pr[U \leq 1] + f_X(x \mid U > 1) \Pr[U > 1]$$



Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}(0, 4)$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \text{Uniform}(0, 2)$.
- Caso contrário, então $X \sim \text{Bernoulli}(2/3)$.

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de X .

Determine também $\Pr[X > 1]$ e $\Pr[X \geq 1]$.

PDF:

Pelo **teorema da probabilidade total**:

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Uniform}(0,2)} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

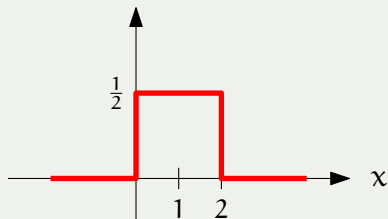
$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Uniform}(0,2)} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$



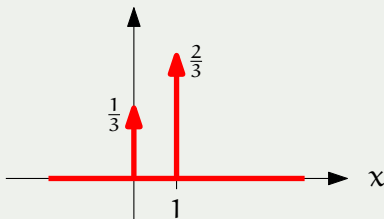
Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Uniform}(0,2)} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$$f_X(x \mid U \leq 1)$$



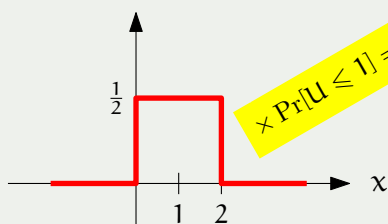
$$f_X(x \mid U > 1)$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

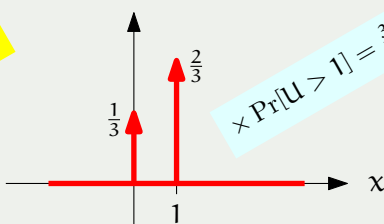
$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Uniform}(0,2)} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$$f_X(x \mid U \leq 1)$$



$$\frac{1}{2} [0 \leq x \leq 2]$$

$$f_X(x \mid U > 1)$$



$$\frac{1}{3} \delta(x) + \frac{2}{3} \delta(x - 1)$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Uniform}(0,2)} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}[0 \leq x \leq 2] \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\delta(x-1) \right) \times \frac{3}{4}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Uniform}(0,2)} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}[0 \leq x \leq 2] \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\delta(x-1) \right) \times \frac{3}{4}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{8}[0 \leq x \leq 2] + \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$$

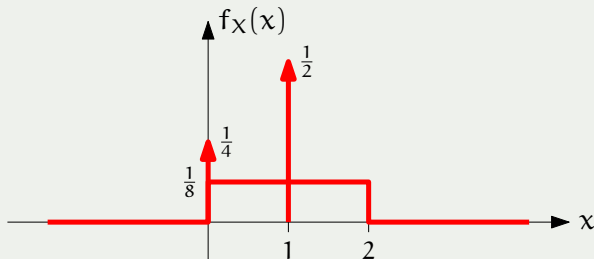


Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Uniform}(0,2)} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}[0 \leq x \leq 2] \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\delta(x-1) \right) \times \frac{3}{4}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{8}[0 \leq x \leq 2] + \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$$



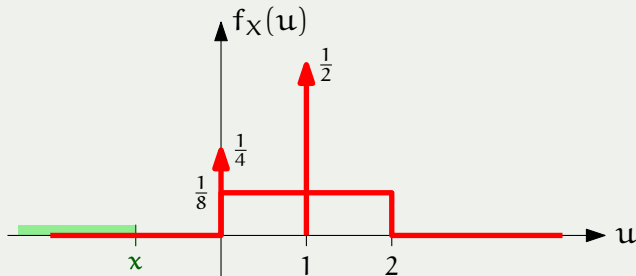
CDF:

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x^+} f_X(u) du$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



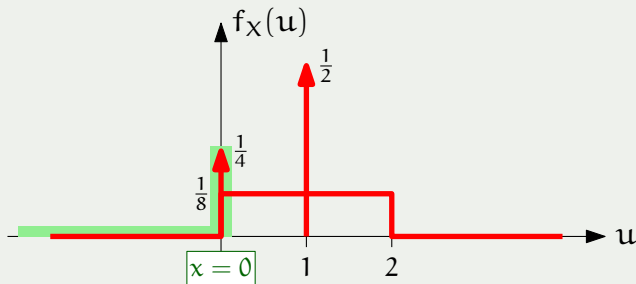
Caso $x < 0$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^x 0 \, du}_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



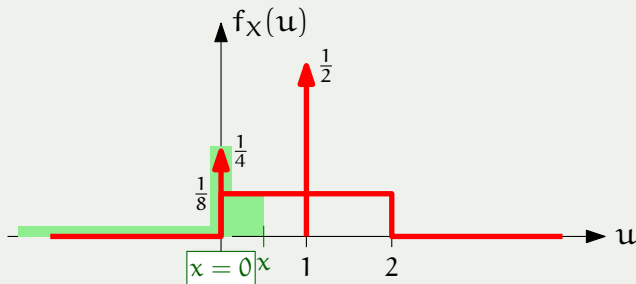
Caso $x = 0$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_0 + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



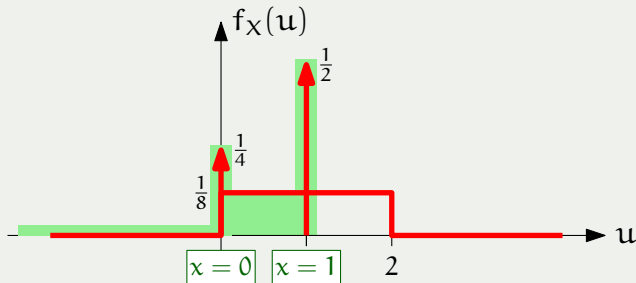
Caso $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_0 + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^x \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}x} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x \end{aligned}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



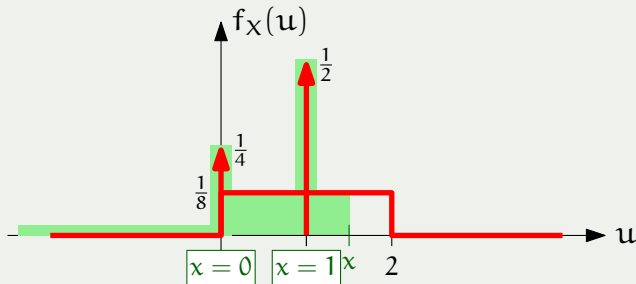
Caso $x = 1$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_0 + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2} \delta(u-1) \, du}_{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



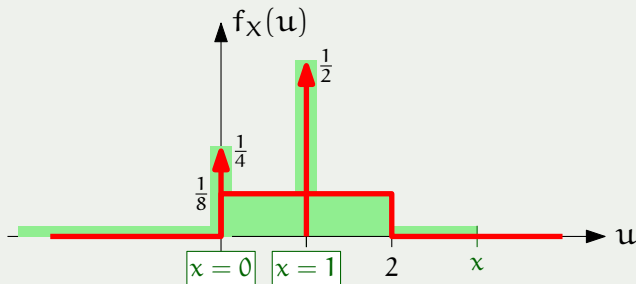
Caso $1 < x < 2$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_0 + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2} \delta(u-1) \, du}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{1^+}^x \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}(x-1)} \\ &= \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x-1) \end{aligned}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



Caso $x \geq 2$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_0 + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2} \delta(u-1) \, du}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{1^+}^2 \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_2^x 0 \, du}_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

Sumário:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{7}{8}, & x = 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x - 1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

Sumário:

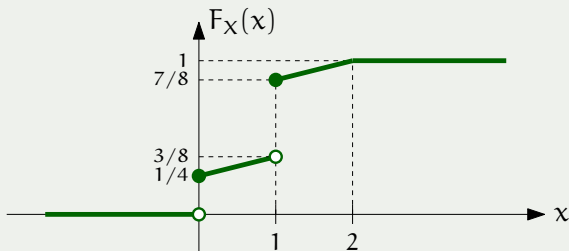
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{7}{8}, & x = 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x - 1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x - 1), & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$



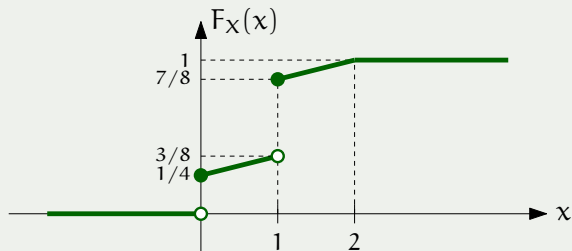
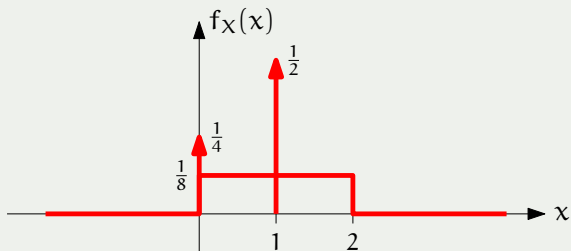
Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

Sumário:

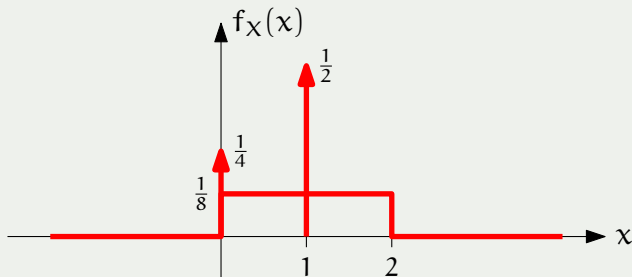
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{7}{8}, & x = 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x-1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x-1), & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo



Valor esperado: Solução 1: Pela **definição** do valor esperado:



$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_{1^+}^2 x \frac{1}{8} dx \end{aligned}$$



Valor esperado: Solução 1: Pela **definição** do valor esperado:

$$E[X] = \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_{1^+}^2 x \frac{1}{8} dx$$



Valor esperado: Solução 1: Pela **definição** do valor esperado:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_{1^+}^2 x \frac{1}{8} dx \\ &= \int_{0^-}^{0^+} 0 \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_0^1 x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} 1 \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_1^2 x \frac{1}{8} dx \end{aligned}$$



Valor esperado: Solução 1: Pela **definição** do valor esperado:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_{1^+}^2 x \frac{1}{8} dx \\ &= \int_{0^-}^{0^+} 0 \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_0^1 x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} 1 \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_1^2 x \frac{1}{8} dx \\ &= 0 \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx + \left[\frac{x^2}{16} \right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2} \int_{1^-}^{1^+} \delta(x-1) dx + \left[\frac{x^2}{16} \right]_{x=1}^{x=2} \end{aligned}$$

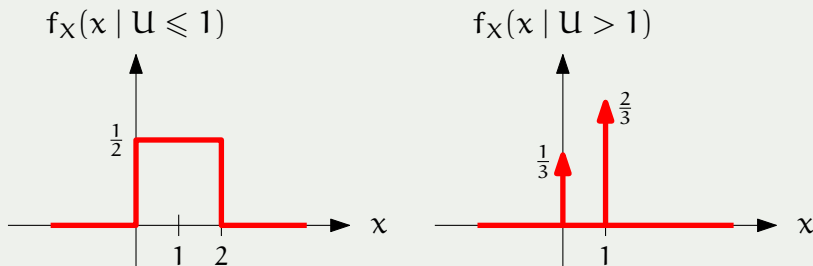


Valor esperado: Solução 1: Pela **definição** do valor esperado:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_{1^+}^2 x \frac{1}{8} dx \\ &= \int_{0^-}^{0^+} 0 \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_0^1 x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} 1 \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_1^2 x \frac{1}{8} dx \\ &= 0 \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx + \left[\frac{x^2}{16} \right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2} \int_{1^-}^{1^+} \delta(x-1) dx + \left[\frac{x^2}{16} \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= 0 \cdot 1 + \left[\frac{1}{16} - \frac{0}{16} \right] + \frac{1}{2} \cdot 1 + \left[\frac{4}{16} - \frac{1}{16} \right] = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



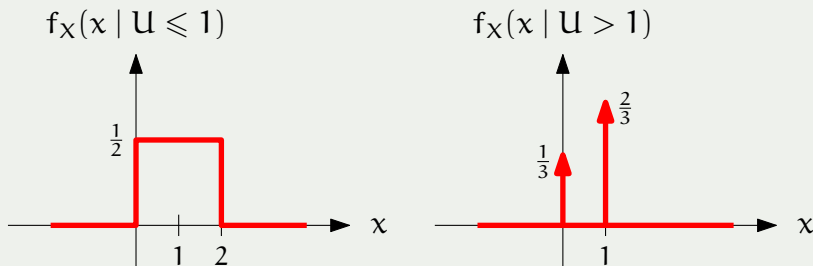
Valor esperado: Solução 2: Pelo **teorema da probabilidade total**:



$$E[X] = E[X \mid U \leq 1] \Pr[U \leq 1] + E[X \mid U > 1] \Pr[U > 1]$$



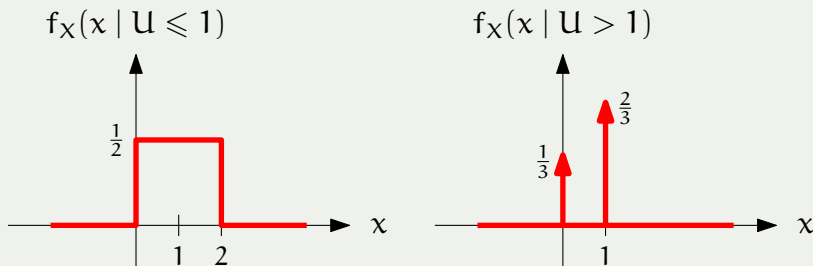
Valor esperado: Solução 2: Pelo **teorema da probabilidade total**:



$$E[X] = \underbrace{E[X | U \leq 1]}_1 \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{E[X | U > 1]}_{\frac{2}{3}} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$



Valor esperado: Solução 2: Pelo **teorema da probabilidade total**:

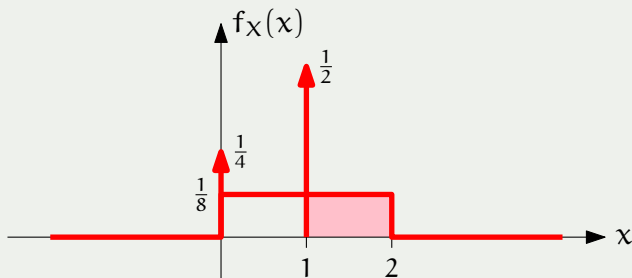


$$E[X] = \underbrace{E[X | U \leq 1]}_1 \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{E[X | U > 1]}_{\frac{2}{3}} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$\Pr[X > 1]$ e $\Pr[X \geq 1]$: **Solução 1:** Pela **PDF**:

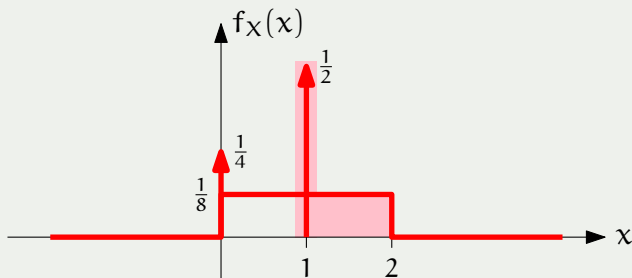


$$\begin{aligned}\Pr[X > 1] &= \int_{1+}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= \underbrace{\int_{1+}^2 f_X(x) dx}_{1/8} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$\Pr[X > 1]$ e $\Pr[X \geq 1]$: **Solução 1:** Pela PDF:

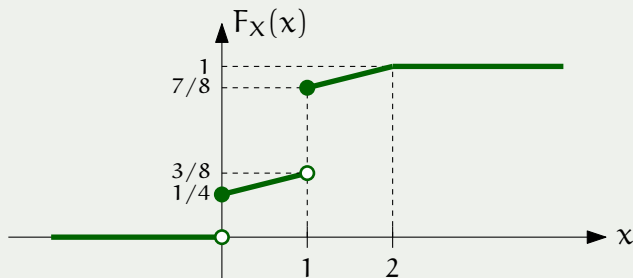


$$\begin{aligned}\Pr[X \geq 1] &= \int_{1-}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= \underbrace{\int_{1-}^{1+} f_X(x) dx}_{1/2} + \underbrace{\int_{1+}^2 f_X(x) dx}_{1/8} = \frac{5}{8}\end{aligned}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$\Pr[X > 1]$ e $\Pr[X \geq 1]$: **Solução 2:** Pela **CDF**:

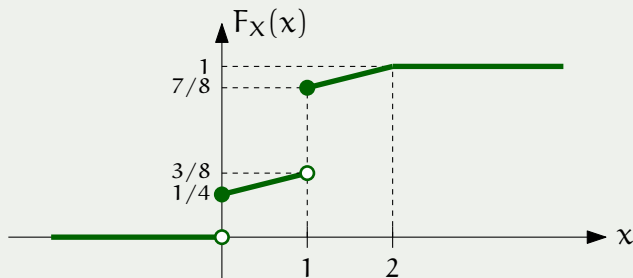


$$\begin{aligned}\Pr[X > 1] &= 1 - \Pr[X \leq 1] \\ &= 1 - \underbrace{F_X(1^+)}_{7/8} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$



Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$\Pr[X > 1]$ e $\Pr[X \geq 1]$: **Solução 2:** Pela **CDF**:



$$\begin{aligned}\Pr[X \geq 1] &= 1 - \Pr[X < 1] \\ &= 1 - \underbrace{F_X(1^-)}_{3/8} = \frac{5}{8}\end{aligned}$$



Exercícios propostos

- 4.7.1.
- 4.7.2.
- 4.7.3.
- 4.7.6.
- 4.7.7.



Esboce sua resposta sempre que possível.



Referências



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.
PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.
Wiley, 3rd edition, 2014.

