

# Processos Estocásticos

Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



**INSTITUTO  
FEDERAL**  
Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

# PMF conjunta e marginais

## PMF conjunta: Definição e propriedades

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

### Definição

A **função massa de probabilidade conjunta** de  $X$  e  $Y$ , denotada por  $p_{X,Y}$ , é definida por

$$p_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x \wedge Y = y],$$

para  $x \in S_X$  e  $y \in S_Y$ .



# PMF conjunta: Definição e propriedades

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

## Definição

A **função massa de probabilidade conjunta** de  $X$  e  $Y$ , denotada por  $p_{X,Y}$ , é definida por

$$p_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x \wedge Y = y],$$

para  $x \in S_X$  e  $y \in S_Y$ .

## Propriedades

$$1 \quad 0 \leq p_{X,Y}(x, y) \leq 1, \quad \forall x, y$$

$$2 \quad \sum_{x,y} p_{X,Y}(x, y) = 1$$



## Exemplo

Considere uma urna com duas bolas vermelhas (**R**), uma bola verde (**G**) e uma bola azul (**B**). Retira-se duas bolas, sem reposição. Seja  $X$  o nº de bolas **R** e  $Y$  o nº de bolas **G** retiradas. Determine a PMF conjunta de  $X$  e  $Y$ .



## Exemplo

Considere uma urna com duas bolas vermelhas (**R**), uma bola verde (**G**) e uma bola azul (**B**). Retira-se duas bolas, sem reposição. Seja  $X$  o nº de bolas **R** e  $Y$  o nº de bolas **G** retiradas. Determine a PMF conjunta de  $X$  e  $Y$ .

| $B_1$    | $B_2$    | $X$ | $Y$ | $Pr$ |
|----------|----------|-----|-----|------|
| <b>R</b> | <b>R</b> | 2   | 0   | 1/6  |
| <b>R</b> | <b>G</b> | 1   | 1   | 1/6  |
| <b>R</b> | <b>B</b> | 1   | 0   | 1/6  |
| <b>G</b> | <b>R</b> | 1   | 1   | 1/6  |
| <b>G</b> | <b>B</b> | 0   | 1   | 1/12 |
| <b>B</b> | <b>R</b> | 1   | 0   | 1/6  |
| <b>B</b> | <b>G</b> | 0   | 1   | 1/12 |



## Exemplo

Considere uma urna com duas bolas vermelhas (R), uma bola verde (G) e uma bola azul (B). Retira-se duas bolas, sem reposição. Seja  $X$  o nº de bolas R e  $Y$  o nº de bolas G retiradas. Determine a PMF conjunta de  $X$  e  $Y$ .

| $B_1$ | $B_2$ | $X$ | $Y$ | Pr   |
|-------|-------|-----|-----|------|
| R     | R     | 2   | 0   | 1/6  |
| R     | G     | 1   | 1   | 1/6  |
| R     | B     | 1   | 0   | 1/6  |
| G     | R     | 1   | 1   | 1/6  |
| G     | B     | 0   | 1   | 1/12 |
| B     | R     | 1   | 0   | 1/6  |
| B     | G     | 0   | 1   | 1/12 |

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |
|----------------|---------|---------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ |
| $x = 0$        | 0       | 1/6     |
| $x = 1$        | 1/3     | 1/3     |
| $x = 2$        | 1/6     | 0       |



## PMFs marginais: Definição

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs discretas com PMF conjunta  $p_{X,Y}$ .

### Definição

As **PMFs marginais** de  $X$  e  $Y$  são dadas por

$$p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{X,Y}(x, y)$$

e

$$p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{X,Y}(x, y)$$



## Exemplo

Considere o exemplo anterior (urna com 2R, 1G, 1B). Foi visto que a PMF conjunta de  $X$  e  $Y$  é dada por:

| $p_{X,Y}(x, y)$ |         |         |
|-----------------|---------|---------|
|                 | $y = 0$ | $y = 1$ |
| $x = 0$         | 0       | 1/6     |
| $x = 1$         | 1/3     | 1/3     |
| $x = 2$         | 1/6     | 0       |

Determine as PMFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .



# PMFs marginais: Exemplo

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |          |
|----------------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 0       | 1/6     |          |
| $x = 1$        | 1/3     | 1/3     |          |
| $x = 2$        | 1/6     | 0       |          |
| $p_Y(y)$       |         |         |          |



## PMFs marginais: Exemplo

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |          |
|----------------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$        | 1/3     | 1/3     |          |
| $x = 2$        | 1/6     | 0       |          |
| $p_Y(y)$       |         |         |          |

■  $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$



## PMFs marginais: Exemplo

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |          |
|----------------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$        | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$        | 1/6     | 0       |          |
| $p_Y(y)$       |         |         |          |

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$



# PMFs marginais: Exemplo

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |          |
|----------------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 0       | $1/6$   | $1/6$    |
| $x = 1$        | $1/3$   | $1/3$   | $2/3$    |
| $x = 2$        | $1/6$   | 0       | $1/6$    |
| $p_Y(y)$       |         |         |          |

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$



# PMFs marginais: Exemplo

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |          |
|----------------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$        | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$        | 1/6     | 0       | 1/6      |
| $p_Y(y)$       | 1/2     |         |          |

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=0) = 1/2$



## PMFs marginais: Exemplo

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |          |
|----------------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$        | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$        | 1/6     | 0       | 1/6      |
| $p_Y(y)$       | 1/2     | 1/2     |          |

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=0) = 1/2$
- $p_Y(y=1) = p_{X,Y}(x=0, y=1) + p_{X,Y}(x=1, y=1) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/2$



## PMFs marginais: Exemplo

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |          |
|----------------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$        | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$        | 1/6     | 0       | 1/6      |
| $p_Y(y)$       | 1/2     | 1/2     | 1        |

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=0) = 1/2$
- $p_Y(y=1) = p_{X,Y}(x=0, y=1) + p_{X,Y}(x=1, y=1) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/2$



## PMFs marginais: Exemplo

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |          |
|----------------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$        | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$        | 1/6     | 0       | 1/6      |
| $p_Y(y)$       | 1/2     | 1/2     | 1        |

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=0) = 1/2$
- $p_Y(y=1) = p_{X,Y}(x=0, y=1) + p_{X,Y}(x=1, y=1) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/2$



Basta somar linhas e colunas.



# PDF conjunta e marginais

## Relembrando...

Seja  $X$  uma VA.

A **PDF** de  $X$ , denotada por  $f_X$ , é tal que

$$\Pr[X \in A] = \int_A f_X(x) dx,$$

para todo subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$ .



## Definição (indireta)

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs (definidas no mesmo experimento probabilístico).

A **PDF conjunta** de  $X$  e  $Y$ , denotada por  $f_{X,Y}$ , é tal que

$$\Pr[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy,$$

para todo subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ .



# PDF conjunta: Definição e propriedades

## Definição (indireta)

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs (definidas no mesmo experimento probabilístico).

A **PDF conjunta** de  $X$  e  $Y$ , denotada por  $f_{X,Y}$ , é tal que

$$\Pr[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy,$$

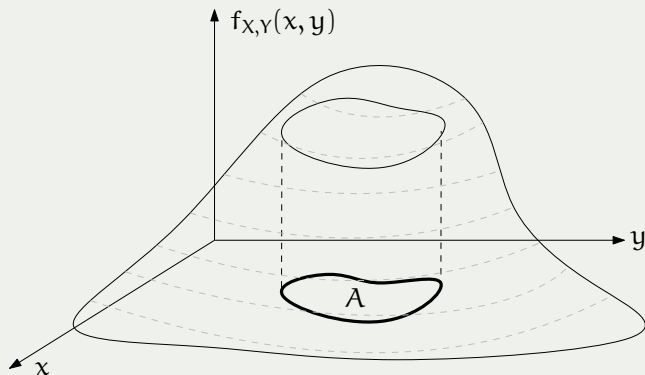
para todo subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ .

## Propriedades

**1**  $f_{X,Y}(x, y) \geq 0, \forall x, y$

**2**  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy = 1$



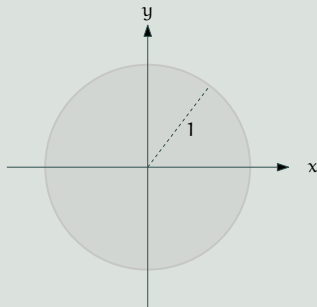


$$\Pr[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy$$



## Exemplo

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs com PDF conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada abaixo.



Determine a PDF conjunta de  $X$  e  $Y$ . Vídeo relacionado: YouTube [!\[\]\(8a290070f8f4fe66461b1fbc567fb9b1\_img.jpg\)](#)



A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante.

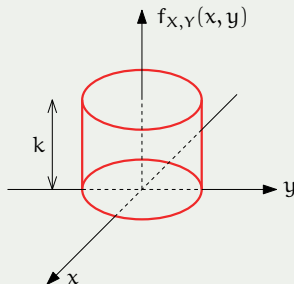


## PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro} = (0,0), \text{raio} = 1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante.

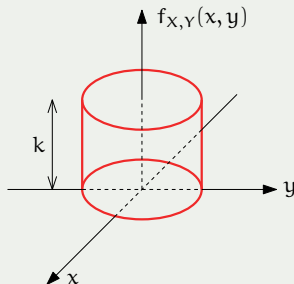


## PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy = 1$$

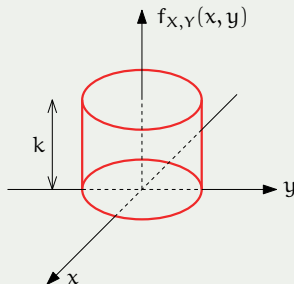


## PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

$$\pi \cdot k = 1$$

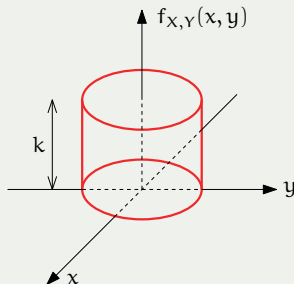


## PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

$$\pi \cdot k = 1$$

$$k = \frac{1}{\pi}$$



A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante.

Portanto:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



## PDFs marginais: Definição

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs com PDF conjunta  $f_{X,Y}$ .

### Definição

As **PDFs marginais** de  $X$  e  $Y$  são dadas por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

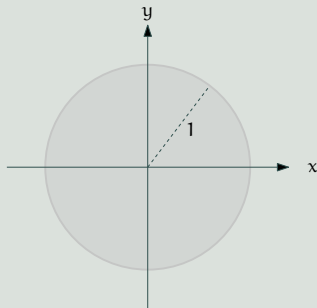
e

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$



## Exemplo

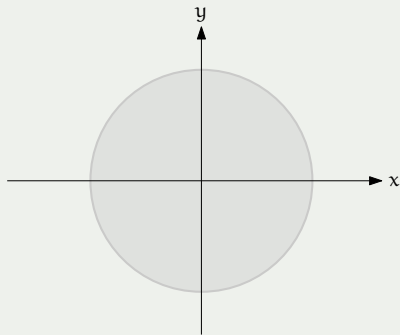
Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs com PDF conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada abaixo.



Determine as PDFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .

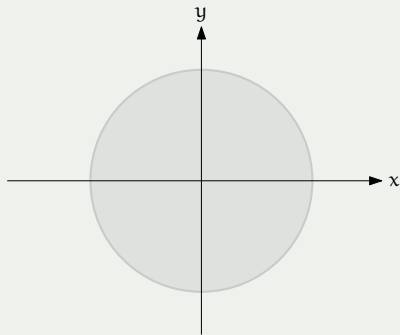


Já foi visto que a PDF conjunta é dada por  $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]$ .



Já foi visto que a PDF conjunta é dada por  $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1]$ .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

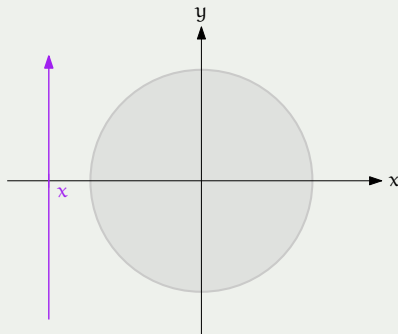


Já foi visto que a PDF conjunta é dada por  $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]$ .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

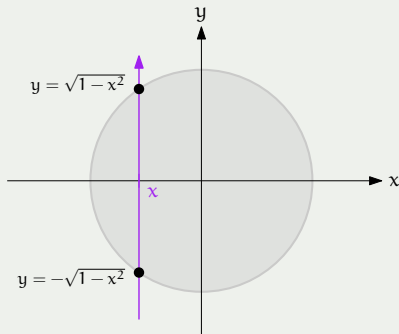
**1** Caso  $x < -1$  ou  $x > 1$ :

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} 0 dy = 0$$



Já foi visto que a PDF conjunta é dada por  $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]$ .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$



**1** Caso  $x < -1$  ou  $x > 1$ :

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} 0 dy = 0$$

**2** Caso  $-1 \leq x \leq 1$ :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$



Portanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



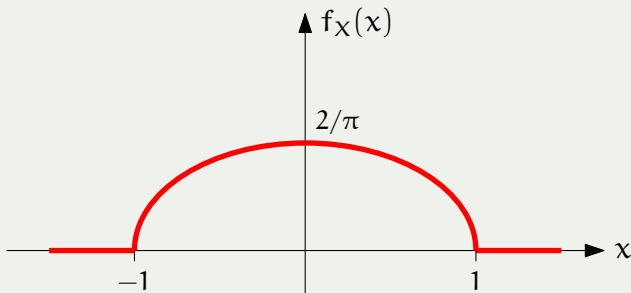
Portanto:

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} [-1 \leq x \leq 1]$$



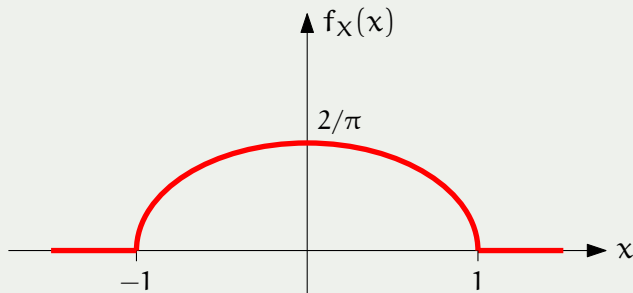
Portanto:

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} [-1 \leq x \leq 1]$$



Portanto:

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} [-1 \leq x \leq 1]$$



Analogamente:

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$



# Independência

## Definição

Duas VAs  $X$  e  $Y$  são ditas ser **(estatisticamente) independentes** se

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \quad (\text{caso discreto})$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (\text{caso geral})$$



## Definição

Duas VAs  $X$  e  $Y$  são ditas ser **(estatisticamente) independentes** se

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) p_Y(y) \quad (\text{caso discreto})$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (\text{caso geral})$$



A conjunta se fatora no produto das marginais.



# Exemplo 1

## Exemplo

Sejam  $U \sim \text{DiscreteUniform}(\{0, 1, 2\})$  e  $V \sim \text{Binomial}(n=2, p=\frac{1}{2})$  duas VAs independentes.

- a Determine as PMFs marginais de  $U$  e de  $V$ .
- b Determine a PMF conjunta de  $U$  e  $V$ .

Sejam  $X = U + V$  e  $Y = UV$ .

- c Determine a PMF conjunta de  $X$  e  $Y$ .
- d Determine as PMFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .



# Exemplo 1

- a Determine as PMFs marginais de  $U$  e de  $V$ .



## Exemplo 1

**a** Determine as PMFs marginais de  $U$  e de  $V$ .

$$U \sim \text{DiscreteUniform}(\{0, 1, 2\}) \quad V \sim \text{Binomial}(n=2, p=\frac{1}{2})$$

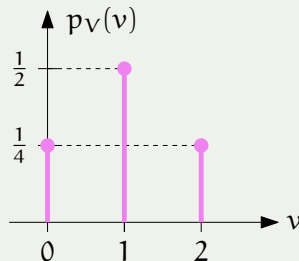
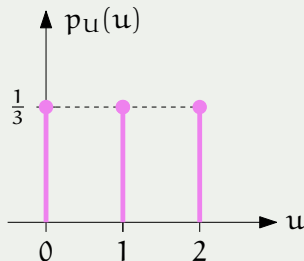


# Exemplo 1

a Determine as PMFs marginais de  $U$  e de  $V$ .

$$U \sim \text{DiscreteUniform}(\{0, 1, 2\})$$

$$V \sim \text{Binomial}(n=2, p=\frac{1}{2})$$



## Exemplo 1

- b** Determine a PMF conjunta de  $U$  e  $V$ .



## Exemplo 1

**b** Determine a PMF conjunta de  $U$  e  $V$ .

$$U \text{ e } V \text{ independentes} \implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u) p_V(v).$$



# Exemplo 1

**b** Determine a PMF conjunta de  $U$  e  $V$ .

$U$  e  $V$  independentes  $\implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u) p_V(v)$ .

| $p_{U,V}(u,v)$ |         |         |         |          |
|----------------|---------|---------|---------|----------|
|                | $v = 0$ | $v = 1$ | $v = 2$ | $p_U(u)$ |
| $u = 0$        |         |         |         | $1/3$    |
| $u = 1$        |         |         |         | $1/3$    |
| $u = 2$        |         |         |         | $1/3$    |
| $p_V(v)$       | $1/4$   | $1/2$   | $1/4$   | $1$      |



## Exemplo 1

**b** Determine a PMF conjunta de  $U$  e  $V$ .

$U$  e  $V$  independentes  $\implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u) p_V(v)$ .

| $p_{U,V}(u,v)$ |         |         |         |          |
|----------------|---------|---------|---------|----------|
|                | $v = 0$ | $v = 1$ | $v = 2$ | $p_U(u)$ |
| $u = 0$        | $1/12$  | $1/6$   | $1/12$  | $1/3$    |
| $u = 1$        | $1/12$  | $1/6$   | $1/12$  | $1/3$    |
| $u = 2$        | $1/12$  | $1/6$   | $1/12$  | $1/3$    |
| $p_V(v)$       | $1/4$   | $1/2$   | $1/4$   | $1$      |



## Exemplo 1

**b** Determine a PMF conjunta de  $U$  e  $V$ .

$U$  e  $V$  independentes  $\implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u) p_V(v)$ .

| $p_{U,V}(u,v)$ |         |         |         |          |
|----------------|---------|---------|---------|----------|
|                | $v = 0$ | $v = 1$ | $v = 2$ | $p_U(u)$ |
| $u = 0$        | $1/12$  | $1/6$   | $1/12$  | $1/3$    |
| $u = 1$        | $1/12$  | $1/6$   | $1/12$  | $1/3$    |
| $u = 2$        | $1/12$  | $1/6$   | $1/12$  | $1/3$    |
| $p_V(v)$       | $1/4$   | $1/2$   | $1/4$   | $1$      |



As linhas/colunas são múltiplas umas das outras.



## Exemplo 1

- c Determine a PMF conjunta de  $X$  e  $Y$ .



# Exemplo 1

**c** Determine a PMF conjunta de  $X$  e  $Y$ .

| $u$ | $V$ | $X$ | $Y$ | $Pr$   |
|-----|-----|-----|-----|--------|
| 0   | 0   | 0   | 0   | $1/12$ |
| 0   | 1   | 1   | 0   | $2/12$ |
| 0   | 2   | 2   | 0   | $1/12$ |
| 1   | 0   | 1   | 0   | $1/12$ |
| 1   | 1   | 2   | 1   | $2/12$ |
| 1   | 2   | 3   | 2   | $1/12$ |
| 2   | 0   | 2   | 0   | $1/12$ |
| 2   | 1   | 3   | 2   | $2/12$ |
| 2   | 2   | 4   | 4   | $1/12$ |



# Exemplo 1

**c** Determine a PMF conjunta de  $X$  e  $Y$ .

| $u$ | $v$ | $x$ | $y$ | $\text{Pr}$ |
|-----|-----|-----|-----|-------------|
| 0   | 0   | 0   | 0   | 1/12        |
| 0   | 1   | 1   | 0   | 2/12        |
| 0   | 2   | 2   | 0   | 1/12        |
| 1   | 0   | 1   | 0   | 1/12        |
| 1   | 1   | 2   | 1   | 2/12        |
| 1   | 2   | 3   | 2   | 1/12        |
| 2   | 0   | 2   | 0   | 1/12        |
| 2   | 1   | 3   | 2   | 2/12        |
| 2   | 2   | 4   | 4   | 1/12        |

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |         |         |
|----------------|---------|---------|---------|---------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$ | $y = 4$ |
| $x = 0$        | 1/12    | 0       | 0       | 0       |
| $x = 1$        | 3/12    | 0       | 0       | 0       |
| $x = 2$        | 2/12    | 2/12    | 0       | 0       |
| $x = 3$        | 0       | 0       | 3/12    | 0       |
| $x = 4$        | 0       | 0       | 0       | 1/12    |



## Exemplo 1

- d Determine as PMFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .



# Exemplo 1

**d** Determine as PMFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |         |         | $p_X(x)$ |
|----------------|---------|---------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$ | $y = 4$ |          |
| $x = 0$        | 1/12    | 0       | 0       | 0       |          |
| $x = 1$        | 3/12    | 0       | 0       | 0       |          |
| $x = 2$        | 2/12    | 2/12    | 0       | 0       |          |
| $x = 3$        | 0       | 0       | 3/12    | 0       |          |
| $x = 4$        | 0       | 0       | 0       | 1/12    |          |
| $p_Y(y)$       |         |         |         |         |          |



## Exemplo 1

**d** Determine as PMFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |         |         |          |
|----------------|---------|---------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$ | $y = 4$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 1/12    | 0       | 0       | 0       | 1/12     |
| $x = 1$        | 3/12    | 0       | 0       | 0       | 3/12     |
| $x = 2$        | 2/12    | 2/12    | 0       | 0       | 4/12     |
| $x = 3$        | 0       | 0       | 3/12    | 0       | 3/12     |
| $x = 4$        | 0       | 0       | 0       | 1/12    | 1/12     |
| $p_Y(y)$       | 6/12    | 2/12    | 3/12    | 1/12    |          |



## Exemplo 1

**d** Determine as PMFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |         |         |          |
|----------------|---------|---------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$ | $y = 4$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 1/12    | 0       | 0       | 0       | 1/12     |
| $x = 1$        | 3/12    | 0       | 0       | 0       | 3/12     |
| $x = 2$        | 2/12    | 2/12    | 0       | 0       | 4/12     |
| $x = 3$        | 0       | 0       | 3/12    | 0       | 3/12     |
| $x = 4$        | 0       | 0       | 0       | 1/12    | 1/12     |
| $p_Y(y)$       | 6/12    | 2/12    | 3/12    | 1/12    | 1        |



## Exemplo 1

- d Determine as PMFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .

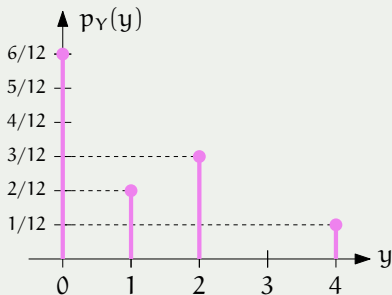
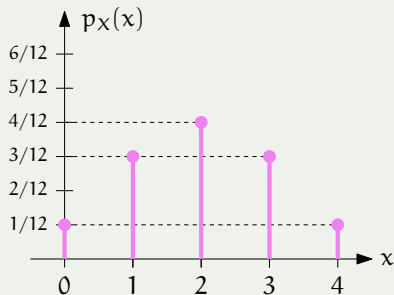
| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |         |         |          |
|----------------|---------|---------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$ | $y = 4$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 1/12    | 0       | 0       | 0       | 1/12     |
| $x = 1$        | 3/12    | 0       | 0       | 0       | 3/12     |
| $x = 2$        | 2/12    | 2/12    | 0       | 0       | 4/12     |
| $x = 3$        | 0       | 0       | 3/12    | 0       | 3/12     |
| $x = 4$        | 0       | 0       | 0       | 1/12    | 1/12     |
| $p_Y(y)$       | 6/12    | 2/12    | 3/12    | 1/12    | 1        |

$X$  e  $Y$  são dependentes.



# Exemplo 1

d) Determine as PMFs marginais de X e de Y.



### Exemplo

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs com PDF conjunta dada por

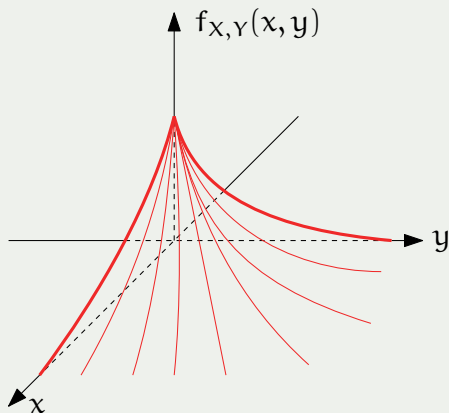
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x, y \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- a** Determine as PDFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .
- b** São  $X$  e  $Y$  dependentes ou independentes?



## Exemplo 2

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0]$$



## Exemplo 2

- a Determine as PDFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .



## Exemplo 2

- a** Determine as PDFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$



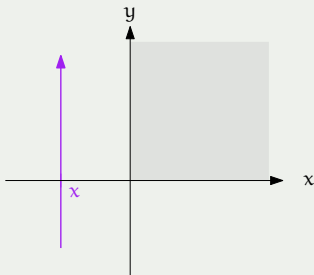
## Exemplo 2

- a Determine as PDFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

■ Caso  $x < 0$ :

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} 0 dy = 0$$

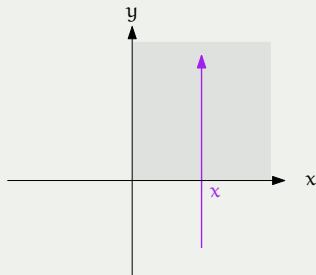


## Exemplo 2

**a** Determine as PDFs marginais de  $X$  e de  $Y$ .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

■ Caso  $x \geq 0$ :



$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{y=-\infty}^{y=0} 0 dy + \int_{y=0}^{y=\infty} e^{-(x+y)} dy \\ &= e^{-x} \int_{y=0}^{y=\infty} e^{-y} dy \\ &= e^{-x} \left[ -e^{-y} \right]_{y=0}^{y=\infty} \\ &= e^{-x} [-0 - (-1)] = e^{-x} \end{aligned}$$



## Exemplo 2

Portanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad [\text{ou seja, } X \sim \text{Exponential}(1)]$$



## Exemplo 2

Portanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad [\text{ou seja, } X \sim \text{Exponential}(1)]$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad [\text{ou seja, } Y \sim \text{Exponential}(1)]$$



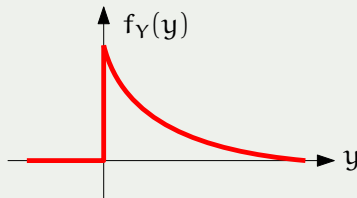
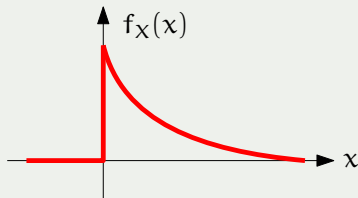
## Exemplo 2

Portanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad [\text{ou seja, } X \sim \text{Exponential}(1)]$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad [\text{ou seja, } Y \sim \text{Exponential}(1)]$$



## Exemplo 2

**b** São  $X$  e  $Y$  dependentes ou independentes?



**b** São  $X$  e  $Y$  dependentes ou independentes?

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0]$$



**b** São  $X$  e  $Y$  dependentes ou independentes?

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0] \\ &= e^{-x} e^{-y} [x \geq 0] [y \geq 0]\end{aligned}$$



**b** São  $X$  e  $Y$  dependentes ou independentes?

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0] \\&= e^{-x} e^{-y} [x \geq 0] [y \geq 0] \\&= e^{-x} [x \geq 0] e^{-y} [y \geq 0]\end{aligned}$$



**b** São  $X$  e  $Y$  dependentes ou independentes?

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0] \\&= e^{-x} e^{-y} [x \geq 0] [y \geq 0] \\&= e^{-x} [x \geq 0] e^{-y} [y \geq 0] \\&= f_X(x) f_Y(y)\end{aligned}$$



## Exemplo 2

**b** São  $X$  e  $Y$  dependentes ou independentes?

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0] \\&= e^{-x} e^{-y} [x \geq 0] [y \geq 0] \\&= e^{-x} [x \geq 0] e^{-y} [y \geq 0] \\&= f_X(x) f_Y(y)\end{aligned}$$

Portanto,  $X$  e  $Y$  são independentes.



# Distribuição condicional

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.



Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

### Definição

A **PMF condicional** de  $X$  dado  $Y = y$  é definida por

$$p_X(x \mid Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

definida apenas se  $p_Y(y) \neq 0$ .



Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

### Definição

A **PMF condicional** de  $X$  dado  $Y = y$  é definida por

$$p_X(x | Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

definida apenas se  $p_Y(y) \neq 0$ .



Como  $X$  se distribui sabendo que  $Y = y$ .



Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

### Definição

A **PMF condicional** de  $X$  dado  $Y = y$  é definida por

$$p_X(x \mid Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

definida apenas se  $p_Y(y) \neq 0$ .

### Notações alternativas

$$p_X(x \mid Y = y) = p_{X|Y=y}(x) = p_{X|Y}(x \mid y)$$



## Exemplo

Considere o exemplo anterior (urna com 2R, 1G, 1B). Lembre-se que  $X$  é o nº de bolas R e  $Y$  é o nº de bolas G, após retiradas duas bolas. Foi visto que a PMF conjunta de  $X$  e  $Y$  é dada por:

| $p_{X,Y}(x,y)$ |         |         |          |
|----------------|---------|---------|----------|
|                | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$        | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$        | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$        | 1/6     | 0       | 1/6      |
| $p_Y(y)$       | 1/2     | 1/2     | 1        |

Determine as PMFs condicionais de  $Y$  dado  $X = x$ , para  $x \in \{0, 1, 2\}$ .



# Exemplo

$$p_Y(y \mid X = x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}$$

| $p_{X,Y}(x, y)$ |         |         |          |
|-----------------|---------|---------|----------|
|                 | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$         | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$         | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$         | 1/6     | 0       | 1/6      |
| $p_Y(y)$        | 1/2     | 1/2     | 1        |

|  | $y = 0$ | $y = 1$ |
|--|---------|---------|
|  |         |         |



# Exemplo

$$p_Y(y \mid X = 0) = \frac{p_{X,Y}(0, y)}{p_X(0)}$$

| $p_{X,Y}(x, y)$ |         |         |          |
|-----------------|---------|---------|----------|
|                 | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$         | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$         | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$         | 1/6     | 0       | 1/6      |
| $p_Y(y)$        | 1/2     | 1/2     | 1        |

|                     | $y = 0$ | $y = 1$ |
|---------------------|---------|---------|
| $p_Y(y \mid X = 0)$ | 0       | 1       |



# Exemplo

$$p_Y(y \mid X = 1) = \frac{p_{X,Y}(1, y)}{p_X(1)}$$

| $p_{X,Y}(x, y)$ |         |         |          |
|-----------------|---------|---------|----------|
|                 | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$         | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$         | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$         | 1/6     | 0       | 1/6      |
| $p_Y(y)$        | 1/2     | 1/2     | 1        |

|                     | $y = 0$ | $y = 1$ |
|---------------------|---------|---------|
| $p_Y(y \mid X = 0)$ | 0       | 1       |
| $p_Y(y \mid X = 1)$ | 1/2     | 1/2     |



# Exemplo

$$p_Y(y \mid X = 2) = \frac{p_{X,Y}(2, y)}{p_X(2)}$$

| $p_{X,Y}(x, y)$ |         |         |          |
|-----------------|---------|---------|----------|
|                 | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$         | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$         | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$         | 1/6     | 0       | 1/6      |
| $p_Y(y)$        | 1/2     | 1/2     | 1        |

|                     | $y = 0$ | $y = 1$ |
|---------------------|---------|---------|
| $p_Y(y \mid X = 0)$ | 0       | 1       |
| $p_Y(y \mid X = 1)$ | 1/2     | 1/2     |
| $p_Y(y \mid X = 2)$ | 1       | 0       |



## Exemplo

$$p_Y(y \mid X = x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}$$

| $p_{X,Y}(x, y)$ |         |         |          |
|-----------------|---------|---------|----------|
|                 | $y = 0$ | $y = 1$ | $p_X(x)$ |
| $x = 0$         | 0       | 1/6     | 1/6      |
| $x = 1$         | 1/3     | 1/3     | 2/3      |
| $x = 2$         | 1/6     | 0       | 1/6      |
| $p_Y(y)$        | 1/2     | 1/2     | 1        |

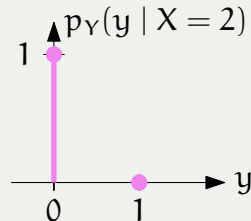
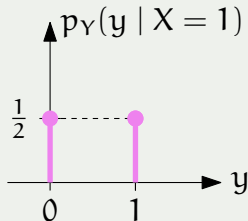
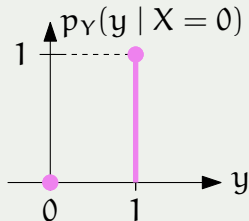
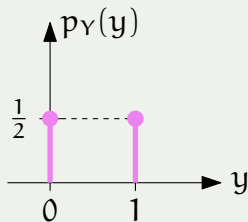
|                     | $y = 0$ | $y = 1$ |
|---------------------|---------|---------|
| $p_Y(y \mid X = 0)$ | 0       | 1       |
| $p_Y(y \mid X = 1)$ | 1/2     | 1/2     |
| $p_Y(y \mid X = 2)$ | 1       | 0       |



Basta **normalizar** as linhas (ou as colunas).



# Exemplo



Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.



Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

## Definição

A **PDF condicional** de  $X$  dado  $Y = y$  é definida por

$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

definida apenas se  $f_Y(y) \neq 0$ .



Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

### Definição

A **PDF condicional** de  $X$  dado  $Y = y$  é definida por

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

definida apenas se  $f_Y(y) \neq 0$ .

### Notações alternativas

$$f_X(x \mid Y = y) = f_{X|Y=y}(x) = f_{X|Y}(x \mid y)$$



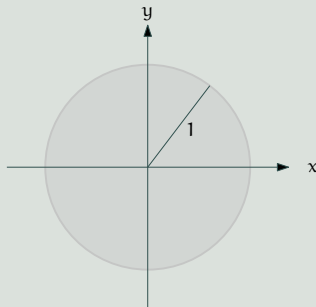


Corresponde a **cortes** (normalizados) na PDF conjunta.



## Exemplo

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs com PDF conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada abaixo.



Determine a PDF condicional de  $X$  dado  $Y = y$ .



## Exemplo

$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra** 

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$



$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra** 

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$

Caso  $y < -1$  ou  $y > 1$ :

$f_X(x \mid Y = y)$  não está definida!



$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra** 

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$

Caso  $-1 \leq y \leq 1$ :

$$f_X(x | Y = y) = \frac{\frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1]}{\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2}} = \frac{[x^2 + y^2 \leq 1]}{2\sqrt{1 - y^2}}$$



$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra** 

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$

Caso  $-1 \leq y \leq 1$ :

$$f_X(x | Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1 - y^2}}, & -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra** 

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$

Caso  $-1 \leq y \leq 1$ :

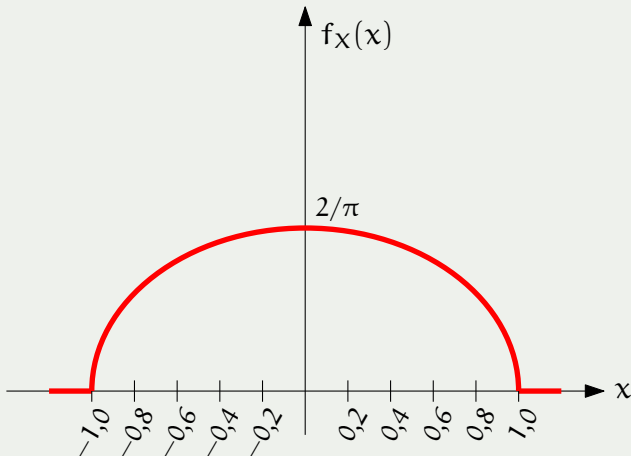
$$f_X(x | Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1 - y^2}}, & -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Conclusão:  $(X | Y = y) \sim \text{Uniform}[-\sqrt{1 - y^2}, \sqrt{1 - y^2})$ .

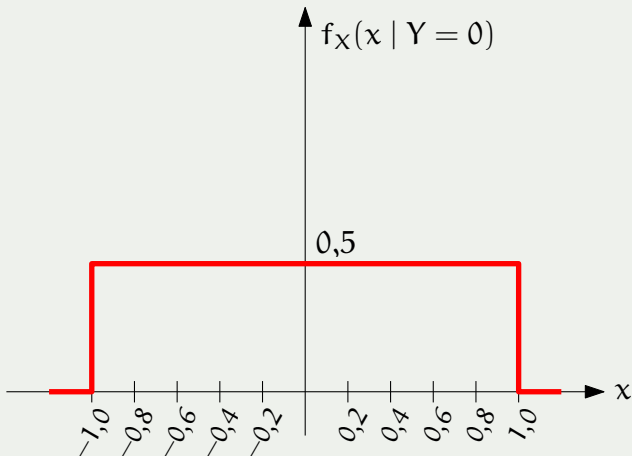


# Exemplo

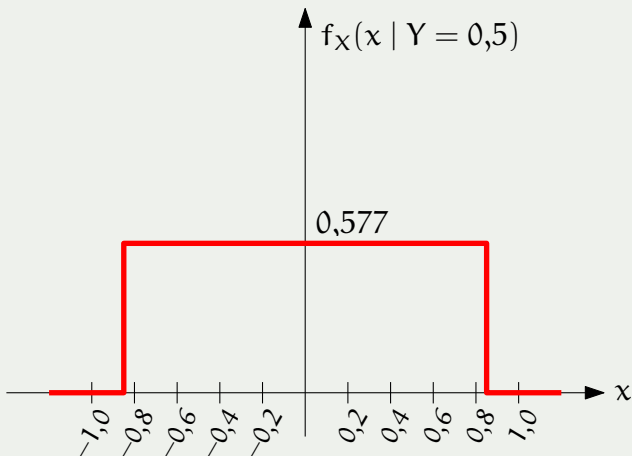
Relembrando a PDF marginal de  $X$ :



Exemplos de casos particulares:

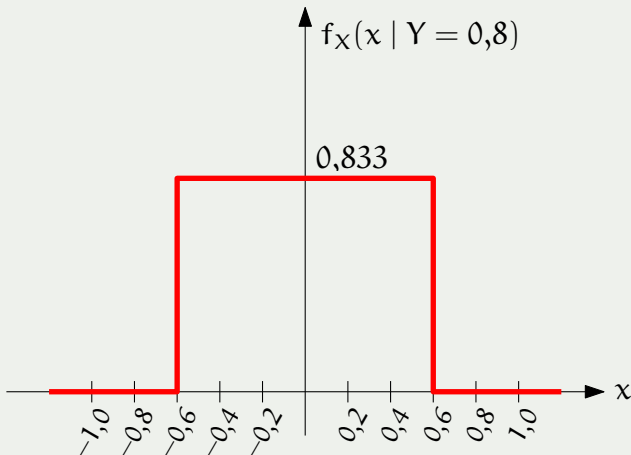


Exemplos de casos particulares:



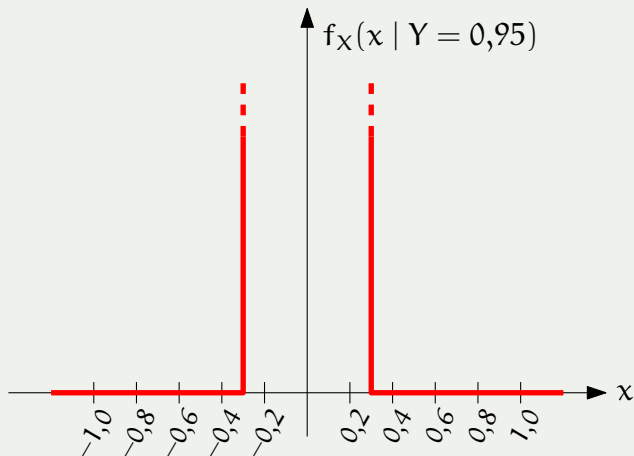
# Exemplo

Exemplos de casos particulares:



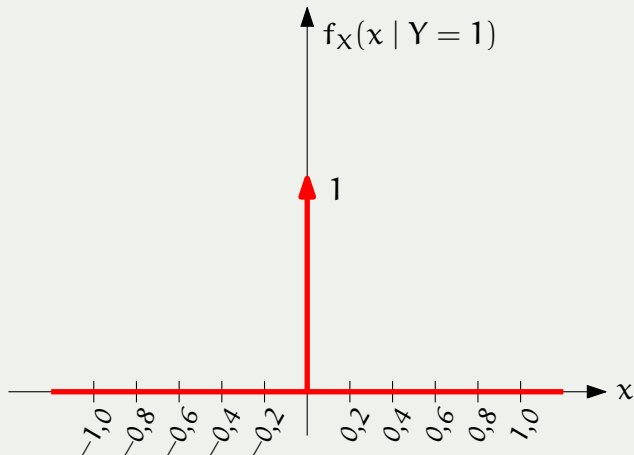
# Exemplo

Exemplos de casos particulares:



# Exemplo

Exemplos de casos particulares:



## Proposição

Para o caso discreto:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff p_{X|Y=y} = p_X \quad \forall y : p_Y(y) \neq 0$$

Para o caso geral:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff f_{X|Y=y} = f_X \quad \forall y : f_Y(y) \neq 0$$



## Proposição

Para o caso discreto:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff p_{X|Y=y} = p_X \quad \forall y : p_Y(y) \neq 0$$

Para o caso geral:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff f_{X|Y=y} = f_X \quad \forall y : f_Y(y) \neq 0$$

**Demonstração:**

$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x). \quad \square$$



# Exercícios propostos

- |          |                 |           |
|----------|-----------------|-----------|
| ■ 5.2.1. | ■ 5.4.1.        | ■ 5.6.3.  |
| ■ 5.2.4. | ■ 5.4.2.        | ■ 5.6.7.  |
| ■ 5.3.1. | ■ 5.5.1, 7.5.6. | ■ 7.4.3.  |
| ■ 5.3.4. | ■ 5.5.4, 7.5.7. | ■ 7.4.11. |



*Esboce sua resposta sempre que possível.*



# Referências



JOSÉ PAULO DE ALMEIDA ALBUQUERQUE, JOSÉ MAURO PEDRO FORTES, AND WEILER ALVES FINAMORE.

***PROBABILIDADE, VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.***

Editora Interciência, 2008.



STEVEN M. KAY.

***INTUITIVE PROBABILITY AND RANDOM PROCESSES USING MATLAB®.***

Springer, 2006.



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.

***PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.***

Wiley, 3rd edition, 2014.

