

Processos Estocásticos

Vetores aleatórios

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



**INSTITUTO
FEDERAL**

Santa Catarina

Câmpus
São José

Vetores aleatórios

Definição

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ definidas no mesmo experimento probabilístico.

Então, diz-se que

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{bmatrix}^T$$

é um **vetor aleatório** ($\vec{VA}$).



Definição

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ definidas no mesmo experimento probabilístico.

Então, diz-se que

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{bmatrix}^T$$

é um **vetor aleatório** ($\vec{VA}$).

PMF de $\vec{X}$: $p_{\vec{X}}(\vec{x}) = p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (caso discreto)

PDF de $\vec{X}$: $f_{\vec{X}}(\vec{x}) = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (caso geral)



Seja $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ um $\vec{V}A$.

Definição

O **vetor média** de $\vec{X}$ é definido por

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = E[\vec{X}]$$



Seja $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ um $\vec{V}A$.

Definição

O **vetor média** de $\vec{X}$ é definido por

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = E[\vec{X}]$$

A **matriz covariância** de $\vec{X}$ é definida por

$$C_{\vec{X}} = E[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T]$$



Vetor média e matriz covariância

Seja $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ um $\vec{V}A$.

Definição

O **vetor média** de $\vec{X}$ é definido por

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = E[\vec{X}]$$

A **matriz covariância** de $\vec{X}$ é definida por

$$C_{\vec{X}} = E[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T]$$



Obs.: O valor esperado de um vetor aleatório (ou de uma matriz aleatória) é definido tomando-se o valor esperado elemento-a-elemento.



De maneira explícita:

■ Vetor média:

$$\vec{\mu}_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}$$



De maneira explícita:

■ Vetor média:

$$\vec{\mu}_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}$$

■ Matriz covariância:

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} \text{var}[X_1] & \text{cov}[X_1, X_2] & \cdots & \text{cov}[X_1, X_n] \\ \text{cov}[X_2, X_1] & \text{var}[X_2] & \cdots & \text{cov}[X_2, X_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[X_n, X_1] & \text{cov}[X_n, X_2] & \cdots & \text{var}[X_n] \end{bmatrix}$$



Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$C_{\vec{x}}$$



Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$C_{\vec{X}} = E[(\vec{X} - \bar{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \bar{\mu}_{\vec{X}})^T]$$



Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$\begin{aligned}C_{\vec{X}} &= E[(\vec{X} - \bar{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \bar{\mu}_{\vec{X}})^T] \\&= E\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^T\right]\end{aligned}$$



Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$\begin{aligned}C_{\vec{X}} &= E[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T] \\&= E\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^T\right] \\&= E\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right]\end{aligned}$$



Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$\begin{aligned}C_{\vec{X}} &= E[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T] \\&= E\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^T\right] \\&= E\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right] \\&= E\left[\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}) \\ (X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2}) \end{bmatrix}\right]\end{aligned}$$



Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$\begin{aligned}C_{\vec{X}} &= E[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T] \\&= E\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^T\right] \\&= E\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right] \\&= E\left[\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}) \\ (X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2}) \end{bmatrix}\right] \\&= \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1})] & E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] \\ E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1})] & E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2})] \end{bmatrix}\end{aligned}$$



Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$\begin{aligned}C_{\bar{X}} &= E[(\bar{X} - \bar{\mu}_{\bar{X}})(\bar{X} - \bar{\mu}_{\bar{X}})^T] \\&= E\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^T\right] \\&= E\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right] \\&= E\left[\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}) \\ (X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2}) \end{bmatrix}\right] \\&= \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1})] & E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] \\ E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1})] & E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2})] \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} \text{cov}[X_1, X_1] & \text{cov}[X_1, X_2] \\ \text{cov}[X_2, X_1] & \text{cov}[X_2, X_2] \end{bmatrix}\end{aligned}$$



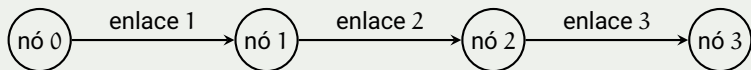
Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$\begin{aligned}C_{\bar{X}} &= E[(\bar{X} - \bar{\mu}_{\bar{X}})(\bar{X} - \bar{\mu}_{\bar{X}})^T] \\&= E\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^T\right] \\&= E\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right] \\&= E\left[\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}) \\ (X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2}) \end{bmatrix}\right] \\&= \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1})] & E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] \\ E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1})] & E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2})] \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} \text{cov}[X_1, X_1] & \text{cov}[X_1, X_2] \\ \text{cov}[X_2, X_1] & \text{cov}[X_2, X_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{var}[X_1] & \text{cov}[X_1, X_2] \\ \text{cov}[X_2, X_1] & \text{var}[X_2] \end{bmatrix}. \quad \square\end{aligned}$$



Exemplo: “relays”

Um pacote é transmitido do nó 0 ao nó 3 através dos nós *relays* 1 e 2:



Para $i = 1, 2, 3$, seja $B_i \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ o indicador de que o enlace i está operacional, com B_1, B_2, B_3 independentes entre si, e seja X_i o indicador de que o pacote alcança o nó i :

$$X_1 = B_1, \quad X_2 = B_1 B_2, \quad X_3 = B_1 B_2 B_3.$$

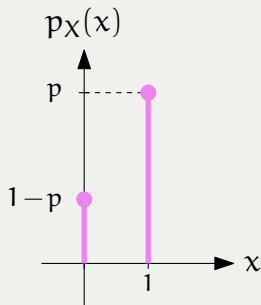
Defina os $\vec{V}$ As $\vec{B} = [B_1 \ B_2 \ B_3]^T$ e $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$.

- a** Determine a PMF, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{B}$.
- b** Determine a PMF, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{X}$.
- c** Seja S o nó mais distante alcançado. Determine $E[S]$ e $\text{var}[S]$.



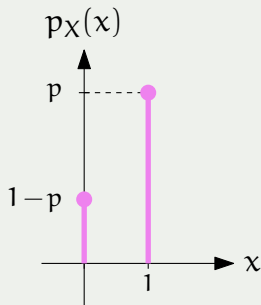
Solução: Relembrando a Bernoulli:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$



Solução: Relembrando a Bernoulli:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$



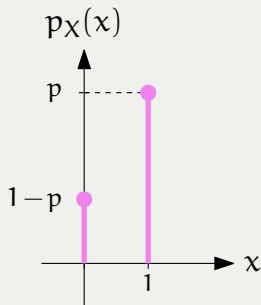
$$E[X] = (0)(1 - p) + (1)p = p$$



Exemplo: “relays”

Solução: Relembrando a Bernoulli:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$



$$E[X] = (0)(1-p) + (1)p = p$$

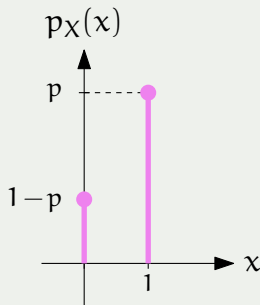
$$E[X^2] = (0)^2(1-p) + (1)^2p = p$$



Exemplo: “relays”

Solução: Relembrando a Bernoulli:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$



$$E[X] = (0)(1-p) + (1)p = p$$

$$E[X^2] = (0)^2(1-p) + (1)^2p = p$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$



Exemplo: “relays”

B_1, B_2, B_3 são exemplo do que chamamos de **VAs i.i.d.**:



i. mutuamente independentes

i.d. identicamente distribuídas: todas com a mesma distribuição

a Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{B}$.



Exemplo: “relays”

B_1, B_2, B_3 são exemplo do que chamamos de **VAs i.i.d.**:



i. mutuamente independentes

i.d. identicamente distribuídas: todas com a mesma distribuição

a Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{B}$.

B_1	B_2	B_3	Pr
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	



Exemplo: “relays”

B_1, B_2, B_3 são exemplo do que chamamos de **VAs i.i.d.**:



i. mutuamente independentes

i.d. identicamente distribuídas: todas com a mesma distribuição

a Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{B}$.

B_1	B_2	B_3	Pr
0	0	0	1/8
0	0	1	1/8
0	1	0	1/8
0	1	1	1/8
1	0	0	1/8
1	0	1	1/8
1	1	0	1/8
1	1	1	1/8



Exemplo: “relays”

B_1, B_2, B_3 são exemplo do que chamamos de **VAs i.i.d.**:



i. mutuamente independentes

i.d. identicamente distribuídas: todas com a mesma distribuição

a Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{B}$.

B_1	B_2	B_3	Pr
0	0	0	1/8
0	0	1	1/8
0	1	0	1/8
0	1	1	1/8
1	0	0	1/8
1	0	1	1/8
1	1	0	1/8
1	1	1	1/8

$\vec{b}$	$p_{\vec{B}}(\vec{b})$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	1/8
$[0 \ 0 \ 1]^T$	1/8
$[0 \ 1 \ 0]^T$	1/8
$[0 \ 1 \ 1]^T$	1/8
$[1 \ 0 \ 0]^T$	1/8
$[1 \ 0 \ 1]^T$	1/8
$[1 \ 1 \ 0]^T$	1/8
$[1 \ 1 \ 1]^T$	1/8



Exemplo: “relays”

- a Determine a PMF, o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{B}$.



- a** Determine a PMF, o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{B}$.

Vetor média:

$$\vec{\mu}_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} E[B_1] \\ E[B_2] \\ E[B_3] \end{bmatrix}$$



- a** Determine a PMF, o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{B}$.

Vetor média:

$$\vec{\mu}_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} E[B_1] \\ E[B_2] \\ E[B_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



- a Determine a PMF, o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{B}$.

Vetor média:

$$\vec{\mu}_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} E[B_1] \\ E[B_2] \\ E[B_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matriz covariância:

$$C_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} \text{var}[B_1] & \text{cov}[B_1, B_2] & \text{cov}[B_1, B_3] \\ \text{cov}[B_2, B_1] & \text{var}[B_2] & \text{cov}[B_2, B_3] \\ \text{cov}[B_3, B_1] & \text{cov}[B_3, B_2] & \text{var}[B_3] \end{bmatrix}$$



- a Determine a PMF, o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{B}$.

Vetor média:

$$\vec{\mu}_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} E[B_1] \\ E[B_2] \\ E[B_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matriz covariância:

$$C_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} \text{var}[B_1] & \text{cov}[B_1, B_2] & \text{cov}[B_1, B_3] \\ \text{cov}[B_2, B_1] & \text{var}[B_2] & \text{cov}[B_2, B_3] \\ \text{cov}[B_3, B_1] & \text{cov}[B_3, B_2] & \text{var}[B_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



Exemplo: “relays”

- b** Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{X}$.



- b Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$X_1 = B_1$$

$$X_2 = B_1 B_2$$

$$X_3 = B_1 B_2 B_3$$



Exemplo: “relays”

- b Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$X_1 = B_1$$

$$X_2 = B_1 B_2$$

$$X_3 = B_1 B_2 B_3$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				



Exemplo: “relays”

- b Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$X_1 = B_1$$

$$X_2 = B_1 B_2$$

$$X_3 = B_1 B_2 B_3$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0	0			
0	0	1	0			
0	1	0	0			
0	1	1	0			
1	0	0	1			
1	0	1	1			
1	1	0	1			
1	1	1	1			



Exemplo: “relays”

- b Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$X_1 = B_1$$

$$X_2 = B_1 B_2$$

$$X_3 = B_1 B_2 B_3$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0	0	0		
0	0	1	0	0		
0	1	0	0	0		
0	1	1	0	0		
1	0	0	1	0		
1	0	1	1	0		
1	1	0	1	1		
1	1	1	1	1		



Exemplo: “relays”

- b Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$X_1 = B_1$$

$$X_2 = B_1 B_2$$

$$X_3 = B_1 B_2 B_3$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	
0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	



Exemplo: “relays”

- b Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$X_1 = B_1$$

$$X_2 = B_1 B_2$$

$$X_3 = B_1 B_2 B_3$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0	0	0	0	1/8
0	0	1	0	0	0	1/8
0	1	0	0	0	0	1/8
0	1	1	0	0	0	1/8
1	0	0	1	0	0	1/8
1	0	1	1	0	0	1/8
1	1	0	1	1	0	1/8
1	1	1	1	1	1	1/8



Exemplo: “relays”

- b Determine a **PMF**, o vetor média e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$X_1 = B_1$$

$$X_2 = B_1 B_2$$

$$X_3 = B_1 B_2 B_3$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0	0	0	0	1/8
0	0	1	0	0	0	1/8
0	1	0	0	0	0	1/8
0	1	1	0	0	0	1/8
1	0	0	1	0	0	1/8
1	0	1	1	0	0	1/8
1	1	0	1	1	0	1/8
1	1	1	1	1	1	1/8

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	1/2
$[1 \ 0 \ 0]^T$	1/4
$[1 \ 1 \ 0]^T$	1/8
$[1 \ 1 \ 1]^T$	1/8



- b** Determine a PMF, o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	$1/2$
$[1 \ 0 \ 0]^T$	$1/4$
$[1 \ 1 \ 0]^T$	$1/8$
$[1 \ 1 \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix}$$



- b** Determine a PMF, o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	$1/2$
$[1 \ 0 \ 0]^T$	$1/4$
$[1 \ 1 \ 0]^T$	$1/8$
$[1 \ 1 \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix}$$

$$E[X_1] = (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{4} + (1)\frac{1}{8} + (1)\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$E[X_2] = (0)\frac{1}{2} + (0)\frac{1}{4} + (1)\frac{1}{8} + (1)\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$E[X_3] = (0)\frac{1}{2} + (0)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{8} + (1)\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$



- b** Determine a PMF, o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	$1/2$
$[1 \ 0 \ 0]^T$	$1/4$
$[1 \ 1 \ 0]^T$	$1/8$
$[1 \ 1 \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$E[X_1] = (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{4} + (1)\frac{1}{8} + (1)\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$E[X_2] = (0)\frac{1}{2} + (0)\frac{1}{4} + (1)\frac{1}{8} + (1)\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$E[X_3] = (0)\frac{1}{2} + (0)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{8} + (1)\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$



- b** Determine a PMF, o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	$1/2$
$[1 \ 0 \ 0]^T$	$1/4$
$[1 \ 1 \ 0]^T$	$1/8$
$[1 \ 1 \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$E[X_1^2] = (0)^2 \frac{1}{2} + (1)^2 \frac{1}{4} + (1)^2 \frac{1}{8} + (1)^2 \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$E[X_2^2] = (0)^2 \frac{1}{2} + (0)^2 \frac{1}{4} + (1)^2 \frac{1}{8} + (1)^2 \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$E[X_3^2] = (0)^2 \frac{1}{2} + (0)^2 \frac{1}{4} + (0)^2 \frac{1}{8} + (1)^2 \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$



- b** Determine a PMF, o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	$1/2$
$[1 \ 0 \ 0]^T$	$1/4$
$[1 \ 1 \ 0]^T$	$1/8$
$[1 \ 1 \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{var}[X_1] = E[X_1^2] - E[X_1]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{var}[X_2] = E[X_2^2] - E[X_2]^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

$$\text{var}[X_3] = E[X_3^2] - E[X_3]^2 = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{7}{64}$$



Exemplo: “relays”

- b** Determine a PMF, o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	$1/2$
$[1 \ 0 \ 0]^T$	$1/4$
$[1 \ 1 \ 0]^T$	$1/8$
$[1 \ 1 \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$E[X_1 X_2] = (0)(0)\frac{1}{2} + (1)(0)\frac{1}{4} + (1)(1)\frac{1}{8} + (1)(1)\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$E[X_1 X_3] = (0)(0)\frac{1}{2} + (1)(0)\frac{1}{4} + (1)(0)\frac{1}{8} + (1)(1)\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$E[X_2 X_3] = (0)(0)\frac{1}{2} + (0)(0)\frac{1}{4} + (1)(0)\frac{1}{8} + (1)(1)\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$



- b** Determine a PMF, o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	$1/2$
$[1 \ 0 \ 0]^T$	$1/4$
$[1 \ 1 \ 0]^T$	$1/8$
$[1 \ 1 \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{cov}[X_1, X_2] = E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\text{cov}[X_1, X_3] = E[X_1 X_3] - E[X_1] E[X_3] = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16}$$

$$\text{cov}[X_2, X_3] = E[X_2 X_3] - E[X_2] E[X_3] = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{32}$$



Exemplo: “relays”

- b** Determine a PMF, o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0 \ 0 \ 0]^T$	$1/2$
$[1 \ 0 \ 0]^T$	$1/4$
$[1 \ 1 \ 0]^T$	$1/8$
$[1 \ 1 \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$C_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \text{var}[X_1] & \text{cov}[X_1, X_2] & \text{cov}[X_1, X_3] \\ \text{cov}[X_2, X_1] & \text{var}[X_2] & \text{cov}[X_2, X_3] \\ \text{cov}[X_3, X_1] & \text{cov}[X_3, X_2] & \text{var}[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{7}{64} \end{bmatrix}$$



- c** Seja S o nó mais distante alcançado. Determine $E[S]$ e $\text{var}[S]$.



Exemplo: “relays”

c Seja S o nó mais distante alcançado. Determine $E[S]$ e $\text{var}[S]$.

Observação chave: $S = X_1 + X_2 + X_3$.



- c** Seja S o nó mais distante alcançado. Determine $E[S]$ e $\text{var}[S]$.

Observação chave: $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Média:

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1 + X_2 + X_3] \\ &= E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] \\ &= \text{soma dos elementos de } \vec{\mu}_{\vec{X}} \\ &= 7/8 = 0.875 \end{aligned}$$



- c** Seja S o nó mais distante alcançado. Determine $E[S]$ e $\text{var}[S]$.

Observação chave: $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Variância:

$$\begin{aligned}\text{var}[S] &= \text{var}[X_1 + X_2 + X_3] \\ &= \text{var}[X_1] + \text{var}[X_2] + \text{var}[X_3] + \\ &\quad 2 \text{cov}[X_1, X_2] + 2 \text{cov}[X_1, X_3] + 2 \text{cov}[X_2, X_3] \\ &= \text{ soma dos elementos de } C_{\tilde{X}} \\ &= 71/64 = 1.109375\end{aligned}$$



Exemplo: “order statistics”

Sejam $U_1, \dots, U_n \sim \text{Uniform}(0, 1)$ VAs independentes entre si. Sejam $X_1, \dots, X_n$ as variáveis $U_1, \dots, U_n$ ordenadas em ordem crescente.

Pode-se mostrar que PDF conjunta de $X_1, \dots, X_n$ é dada por

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} c, & 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

em que $c > 0$ é uma constante. Considere $n = 3$ e seja $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$.

- a Determine o valor da constante c .
- b Determine as PDFs marginais.
- c Determine o vetor média de $\vec{X}$.
- d Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.



Exemplo: “*order statistics*”

Solução: Para simplificar a notação, defina $X = X_1$, $Y = X_2$ e $Z = X_3$.



Exemplo: “order statistics”

Solução: Para simplificar a notação, defina $X = X_1$, $Y = X_2$ e $Z = X_3$.

Nesse caso, tem-se

$$\begin{aligned} f_{X,Y,Z}(x,y,z) &= \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\ &= c [0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]. \end{aligned}$$



Exemplo: “order statistics”

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = c [0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]$$

- a** Determine o valor da constante c .



Exemplo: “order statistics”

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = c [0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]$$

a Determine o valor da constante c .

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \\ &= c \int_0^1 \int_0^z \int_0^y 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= c \int_0^1 \int_0^z y \, dy \, dz \\ &= c \int_0^1 \frac{z^2}{2} \, dz \\ &= c \frac{1}{6} \implies c = 6 \end{aligned}$$



Exemplo: “order statistics”

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = 6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]$$

b Determine as PDFs marginais.



Exemplo: “order statistics”

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = 6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]$$

b Determine as PDFs marginais. [Wolfram Alpha] [Alt]

Para $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \, dy \, dz \\ &= \int_x^1 \int_x^z 6 \, dy \, dz \\ &= 3(1-x)^2 \end{aligned}$$



Exemplo: “order statistics”

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = 6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]$$

b Determine as PDFs marginais. [Wolfram Alpha] [Alt]

Para $0 \leq y \leq 1$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \, dx \, dz \\ &= \int_y^1 \int_0^y 6 \, dx \, dz \\ &= 6y(1-y) \end{aligned}$$



Exemplo: “order statistics”

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = 6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]$$

b Determine as PDFs marginais. [Wolfram Alpha] [Alt]

Para $0 \leq z \leq 1$:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \, dx \, dy \\ &= \int_0^z \int_0^y 6 \, dx \, dy \\ &= 3z^2 \end{aligned}$$



Exemplo: “order statistics”

$$\begin{aligned} E[g(X, Y, Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) \overbrace{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}^{6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]} dx dy dz \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

c Determine o vetor média de $\vec{X}$. [Wolfram Alpha]



Exemplo: “order statistics”

$$\begin{aligned} E[g(X, Y, Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) \overbrace{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}^{6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]} dx dy dz \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

c Determine o vetor média de $\vec{X}$. [Wolfram Alpha]

$$\begin{aligned} E[X] &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y x dx dy dz = \frac{1}{4} \\ E[Y] &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y y dx dy dz = \frac{2}{4} \\ E[Z] &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y z dx dy dz = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



Exemplo: “order statistics”

$$\begin{aligned} E[g(X, Y, Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) \overbrace{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}^{6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]} dx dy dz \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

c Determine o vetor média de $\vec{X}$. [Wolfram Alpha]

Portanto,

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Exemplo: “order statistics”

$$\begin{aligned} E[g(X, Y, Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) \overbrace{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}^{6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]} dx dy dz \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

d Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.



Exemplo: “order statistics”

$$\begin{aligned} E[g(X, Y, Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) \overbrace{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}^{6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]} dx dy dz \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

d Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y x^2 dx dy dz = \frac{1}{10} \\ E[Y^2] &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y y^2 dx dy dz = \frac{3}{10} \\ E[Z^2] &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y z^2 dx dy dz = \frac{6}{10} \end{aligned}$$



Exemplo: “order statistics”

$$\begin{aligned} E[g(X, Y, Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) \overbrace{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}^{6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]} dx dy dz \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

d Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$E[XY] = 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y xy dx dy dz = \frac{3}{20}$$

$$E[XZ] = 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y xz dx dy dz = \frac{4}{20}$$

$$E[YZ] = 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y yz dx dy dz = \frac{8}{20}$$



Exemplo: “order statistics”

$$\begin{aligned} E[g(X, Y, Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) \overbrace{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}^{6[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1]} dx dy dz \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^z \int_0^y g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

d Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

Portanto,

$$C_{\vec{X}} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



Transformações lineares afins

Relembrando da álgebra linear...

Uma **transformação linear** leva:

- um vetor de entrada $\vec{X}$, de dimensão $n \times 1$,
 - em um vetor de saída $\vec{Y}$, de dimensão $m \times 1$,
- e corresponde a uma multiplicação matricial.

Ou seja:

$$\vec{Y} = A\vec{X},$$

onde A é uma matriz $m \times n$.



Um pequeno relaxamento...

Uma **transformação linear afim** leva:

- um vetor de entrada $\vec{X}$, de dimensão $n \times 1$,
- em um vetor de saída $\vec{Y}$, de dimensão $m \times 1$,

e corresponde a uma multiplicação matricial **seguida de uma translação**.

Ou seja:

$$\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b},$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e $\vec{b}$ é um vetor $m \times 1$.



Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y =$$

$$\sigma_Y^2 =$$



Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y = a\mu_X + b$$

$$\sigma_Y^2 =$$



Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y = a\mu_X + b$$

$$\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2$$



Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y = a\mu_X + b$$

$$\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2$$

Proposição

Seja $\vec{X}$ um $\vec{VA}$ e seja $\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$. Então:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} =$$

$$C_{\vec{Y}} =$$



Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y = a\mu_X + b$$

$$\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2$$

Proposição

Seja $\vec{X}$ um $\vec{V}A$ e seja $\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$. Então:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b}$$

$$C_{\vec{Y}} =$$



Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y = a\mu_X + b$$

$$\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2$$

Proposição

Seja $\vec{X}$ um $\vec{V}A$ e seja $\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$. Então:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b}$$

$$C_{\vec{Y}} = AC_{\vec{X}}A^T$$



Demonstração:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = E[\vec{Y}] = E[A\vec{X} + \vec{b}] = A E[\vec{X}] + \vec{b} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b}$$



Demonstração:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = E[\vec{Y}] = E[A\vec{X} + \vec{b}] = A E[\vec{X}] + \vec{b} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b}$$

$$\begin{aligned} C_{\vec{Y}} &= E[(\vec{Y} - \vec{\mu}_{\vec{Y}})(\vec{Y} - \vec{\mu}_{\vec{Y}})^T] \\ &= E[(A\vec{X} + \vec{b} - A\vec{\mu}_{\vec{X}} - \vec{b})(A\vec{X} + \vec{b} - A\vec{\mu}_{\vec{X}} - \vec{b})^T] \\ &= E[(A\vec{X} - A\vec{\mu}_{\vec{X}})(A\vec{X} - A\vec{\mu}_{\vec{X}})^T] \\ &= E[(A(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}}))(A(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}}))^T] \\ &= E[A(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T A^T] \\ &= A E[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T] A^T \\ &= A C_{\vec{X}} A^T. \quad \square \end{aligned}$$



Exemplo

Sejam U e V duas VAs, ambas de média -1 e variância 2 , com coeficiente de Pearson $\rho_{U,V} = 1/2$. Sejam

$$X = U + 2V - 3,$$

$$Y = V - U.$$

Calcule as médias de X e de Y , as variâncias de X e de Y , e o coeficiente de Pearson entre X e Y .



Exemplo

Sejam U e V duas VAs, ambas de média -1 e variância 2 , com coeficiente de Pearson $\rho_{U,V} = 1/2$. Sejam

$$X = U + 2V - 3,$$

$$Y = V - U.$$

Calcule as médias de X e de Y , as variâncias de X e de Y , e o coeficiente de Pearson entre X e Y .

Serão apresentadas duas soluções.



Exemplo

Sejam U e V duas VAs, ambas de média -1 e variância 2 , com coeficiente de Pearson $\rho_{U,V} = 1/2$. Sejam

$$X = U + 2V - 3,$$

$$Y = V - U.$$

Calcule as médias de X e de Y , as variâncias de X e de Y , e o coeficiente de Pearson entre X e Y .

Serão apresentadas duas soluções. Parte comum:

$$\text{cov}[U, V] = \rho_{U,V} \sqrt{\text{var}[U] \text{var}[V]} = (1/2) \sqrt{2 \cdot 2} = 1$$



Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$

$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$



Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$

$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de X:

$$E[X^2] = E[(U + 2V - 3)^2] = E[U^2 + 4V^2 + 4UV - 6U - 12V + 9]$$



Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$

$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de X:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E[(U + 2V - 3)^2] = E[U^2 + 4V^2 + 4UV - 6U - 12V + 9] \\ &= \underbrace{E[U^2]} + 4 \underbrace{E[V^2]} + 4 \underbrace{E[UV]} - 6 \underbrace{E[U]}_{-1} - 12 \underbrace{E[V]}_{-1} + \underbrace{E[9]}_9 \end{aligned}$$



Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$

$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de X:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E[(U + 2V - 3)^2] = E[U^2 + 4V^2 + 4UV - 6U - 12V + 9] \\ &= \underbrace{E[U^2]} + 4 \underbrace{E[V^2]} + 4 \underbrace{E[UV]} - 6 \underbrace{E[U]}_{-1} - 12 \underbrace{E[V]}_{-1} + \underbrace{E[9]}_9 \end{aligned}$$

$$E[U^2] = \text{var}[U] + E[U]^2 = 2 + (-1)^2 = 3$$

$$E[V^2] = \text{var}[V] + E[V]^2 = 2 + (-1)^2 = 3$$

$$E[UV] = \text{cov}[U, V] + E[U]E[V] = 1 + (-1)(-1) = 2$$



Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$

$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de X:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E[(U + 2V - 3)^2] = E[U^2 + 4V^2 + 4UV - 6U - 12V + 9] \\ &= \underbrace{E[U^2]}_3 + 4 \underbrace{E[V^2]}_3 + 4 \underbrace{E[UV]}_2 - 6 \underbrace{E[U]}_{-1} - 12 \underbrace{E[V]}_{-1} + \underbrace{E[9]}_9 = 50 \end{aligned}$$

$$E[U^2] = \text{var}[U] + E[U]^2 = 2 + (-1)^2 = 3$$

$$E[V^2] = \text{var}[V] + E[V]^2 = 2 + (-1)^2 = 3$$

$$E[UV] = \text{cov}[U, V] + E[U]E[V] = 1 + (-1)(-1) = 2$$



Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$

$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de X:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E[(U + 2V - 3)^2] = E[U^2 + 4V^2 + 4UV - 6U - 12V + 9] \\ &= \underbrace{E[U^2]}_3 + 4 \underbrace{E[V^2]}_3 + 4 \underbrace{E[UV]}_2 - 6 \underbrace{E[U]}_{-1} - 12 \underbrace{E[V]}_{-1} + \underbrace{E[9]}_9 = 50 \end{aligned}$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 50 - (-6)^2 = 14$$



Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$

$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variação de Y:

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= E[(V - U)^2] = E[U^2 + V^2 - 2UV] \\ &= \underbrace{E[U^2]}_3 + \underbrace{E[V^2]}_3 - 2 \underbrace{E[UV]}_2 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = 2 - (0)^2 = 2$$



Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$

$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Covariância entre X e Y:

$$\begin{aligned} E[XY] &= E[(U + 2V - 3)(V - U)] = E[-U^2 + 2V^2 - UV - 3U - 3V] \\ &= -\underbrace{E[U^2]}_{\text{3}} + 2\underbrace{E[V^2]}_{\text{3}} - \underbrace{E[UV]}_{\text{2}} + 3\underbrace{E[U]}_{-1} - 3\underbrace{E[V]}_{-1} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 1 - (-6)(0) = 1$$



Solução matricial:

$$\begin{cases} X = U + 2V - 3 \\ Y = V - U \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{\vec{U}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$



Solução matricial:

$$\begin{cases} X = U + 2V - 3 \\ Y = V - U \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{\vec{U}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$



Solução matricial:

$$\begin{cases} X = U + 2V - 3 \\ Y = V - U \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{\vec{U}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$



Solução matricial:

$$\begin{cases} X = U + 2V - 3 \\ Y = V - U \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\vec{\tilde{X}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{\vec{\tilde{U}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{\tilde{b}}}$$

Portanto:

$$\vec{\mu}_{\vec{\tilde{X}}} = A\vec{\mu}_{\vec{\tilde{U}}} + \vec{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Solução matricial:

$$\begin{cases} X = U + 2V - 3 \\ Y = V - U \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\vec{\tilde{X}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{\vec{\tilde{U}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Portanto:

$$\vec{\mu}_{\vec{\tilde{X}}} = A\vec{\mu}_{\vec{\tilde{U}}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$C_{\vec{\tilde{X}}} = AC_{\vec{\tilde{U}}}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



Sumário:

$$\begin{aligned}\mu_X &= -6 & \mu_Y &= 0 \\ \text{var}[X] &= 14 & \text{var}[Y] &= 2 & \text{cov}[X, Y] &= 1\end{aligned}$$

Finalmente (parte comum às duas soluções):

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}} = \frac{1}{\sqrt{(14)(2)}} = \frac{1}{\sqrt{28}}$$



Exercícios propostos

■ 8.1.2.

■ 8.1.3.

■ 8.4.1.

■ 8.4.2.

■ 8.4.4.*

■ 8.4.5.

*Desconsidere a matriz correlação.



Esboce sua resposta sempre que possível.



Referências



JOSÉ PAULO DE ALMEIDA ALBUQUERQUE, JOSÉ MAURO PEDRO FORTES, AND WEILER ALVES FINAMORE.

PROBABILIDADE, VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.

Editora Interciência, 2008.



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.

PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.

Wiley, 3rd edition, 2014.

