

# Processos Estocásticos

Processos estocásticos

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



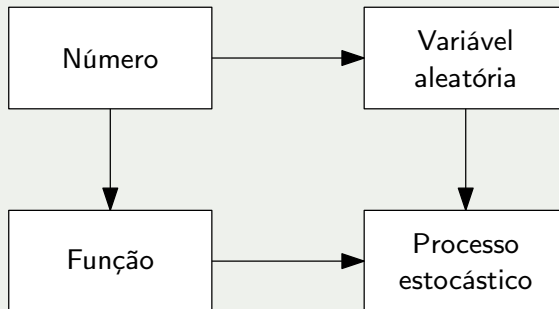
**INSTITUTO  
FEDERAL**

Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

# Introdução

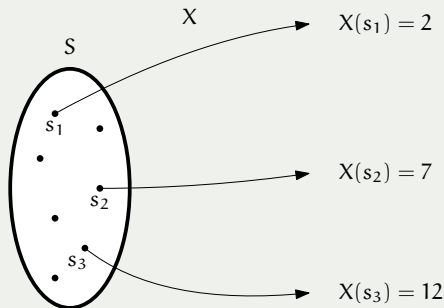


# Definição

Seja  $S$  o espaço amostral de um experimento probabilístico.

Relembrando...

Uma **variável aleatória (VA)** real é um mapeamento  $X$  do espaço amostral para um número real.

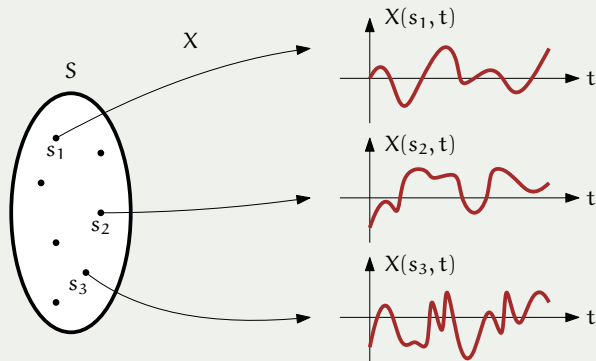


# Definição

Seja  $S$  o espaço amostral de um experimento probabilístico.

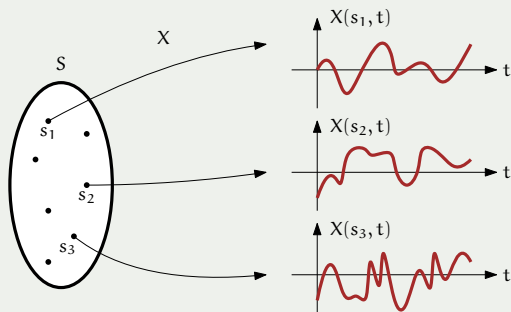
## Definição

Um **processo estocástico (PE)** real é um mapeamento  $X$  do espaço amostral para uma *função* real.



A notação  $X(s, t)$  pode representar:

- um **número**, para  $s$  e  $t$  específicos
- uma **função**, para  $s$  específico e  $t$  arbitrário
- uma **variável aleatória**, para  $t$  específico e  $s$  arbitrário
- um **processo estocástico**, para  $t$  e  $s$  arbitrários



A notação  $X(s, t)$  pode representar:

- um **número**, para  $s$  e  $t$  específicos
- uma **função**, para  $s$  específico e  $t$  arbitrário
- uma **variável aleatória**, para  $t$  específico e  $s$  arbitrário
- um **processo estocástico**, para  $t$  e  $s$  arbitrários



**Convenção.** Omitir a dependência em  $s$  e escrever apenas  $X(t)$  no lugar de  $X(s, t)$ .



A notação  $X(s, t)$  pode representar:

- um **número**, para  $s$  e  $t$  específicos
- uma **função**, para  $s$  específico e  $t$  arbitrário
- uma **variável aleatória**, para  $t$  específico e  $s$  arbitrário
- um **processo estocástico**, para  $t$  e  $s$  arbitrários



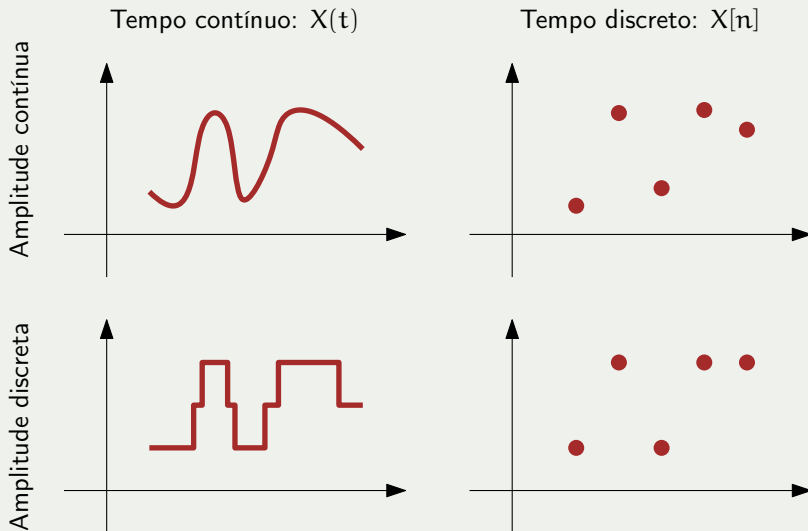
**Convenção.** Omitir a dependência em  $s$  e escrever apenas  $X(t)$  no lugar de  $X(s, t)$ .



**Nomenclatura.** Os possíveis valores assumidos por um PE são chamados de *função-amostra*. Também: *sinál-amostra* ou *sequência-amostra* (dependendo do caso).

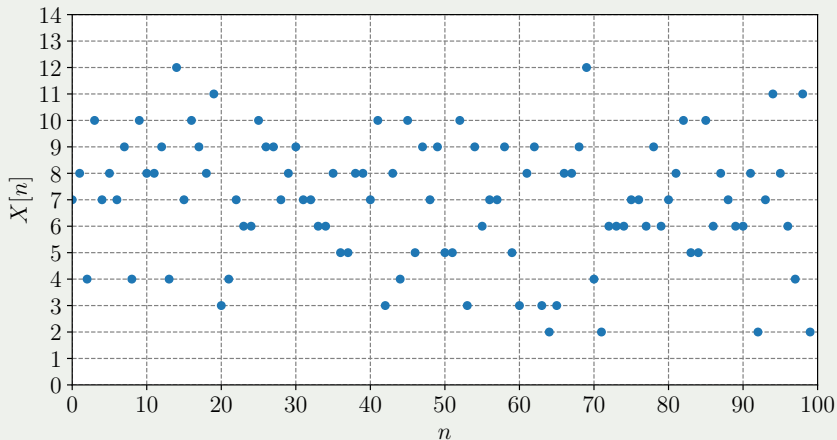


# Revisão: Classificação de funções



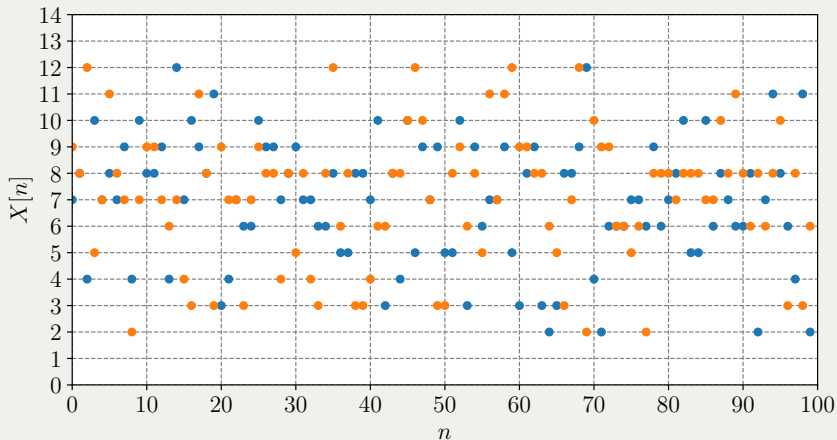
# Exemplos de processos estocásticos

Sequência de lançamento de dois dados (soma dos resultados).



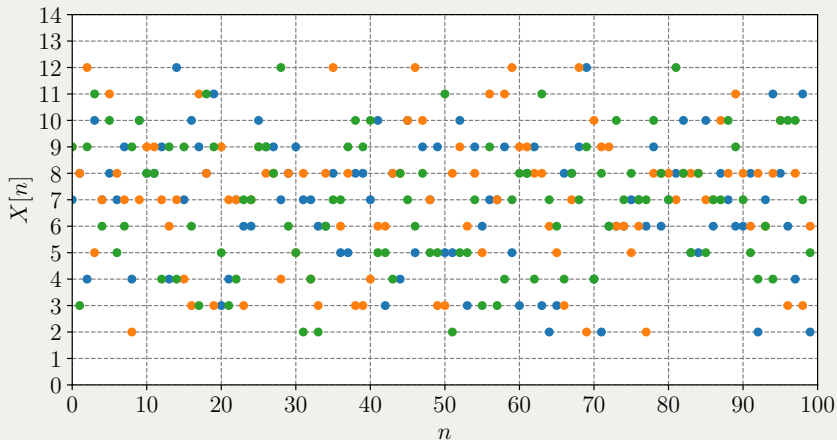
# Exemplos de processos estocásticos

Sequência de lançamento de dois dados (soma dos resultados).



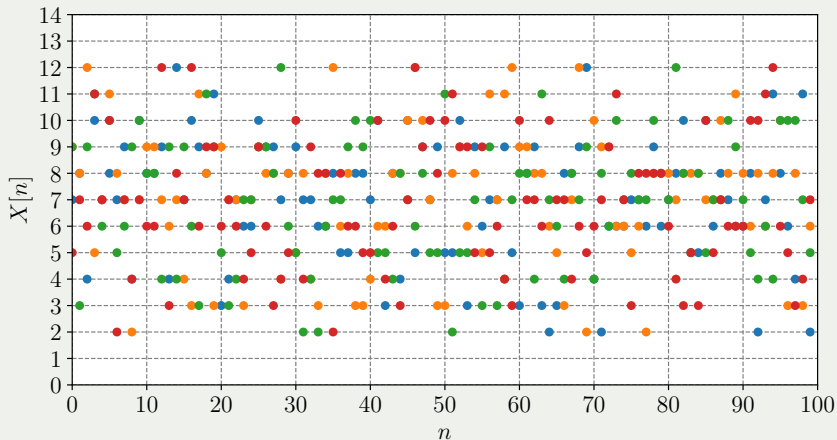
# Exemplos de processos estocásticos

Sequência de lançamento de dois dados (soma dos resultados).

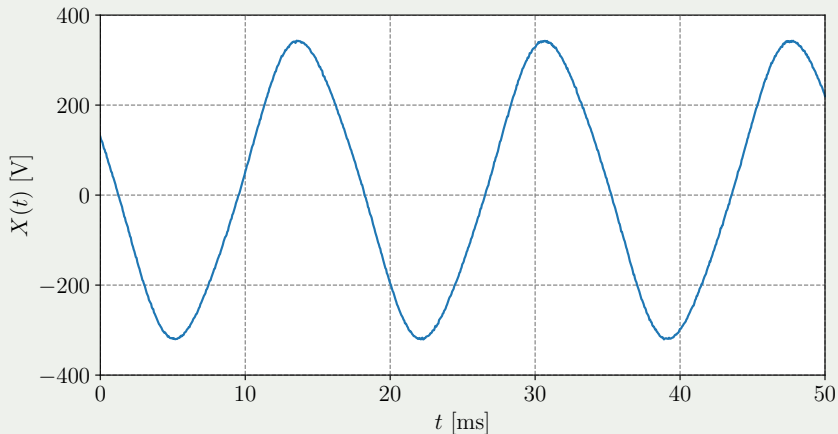


# Exemplos de processos estocásticos

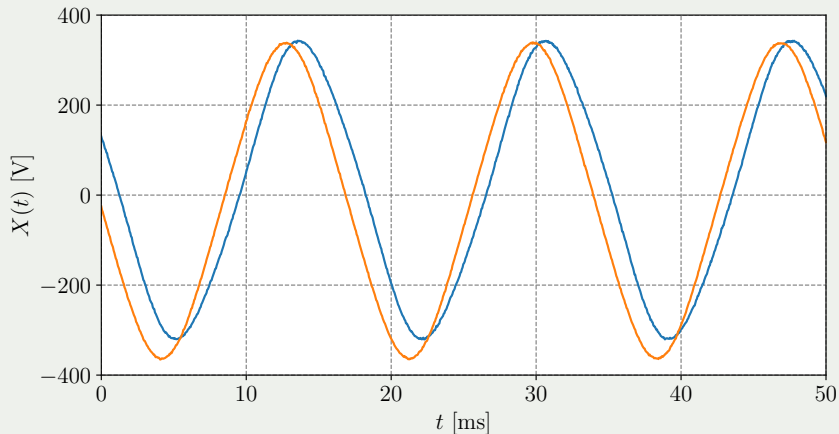
Sequência de lançamento de dois dados (soma dos resultados).



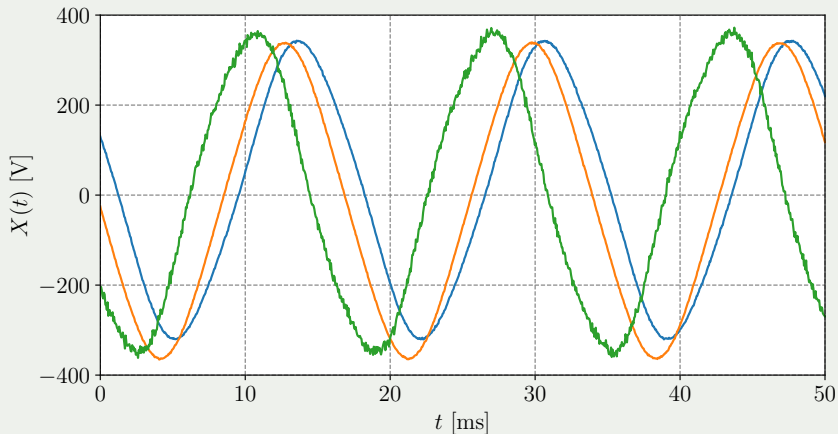
Forma de onda de tensão de uma rede elétrica (220 V e 60 Hz).



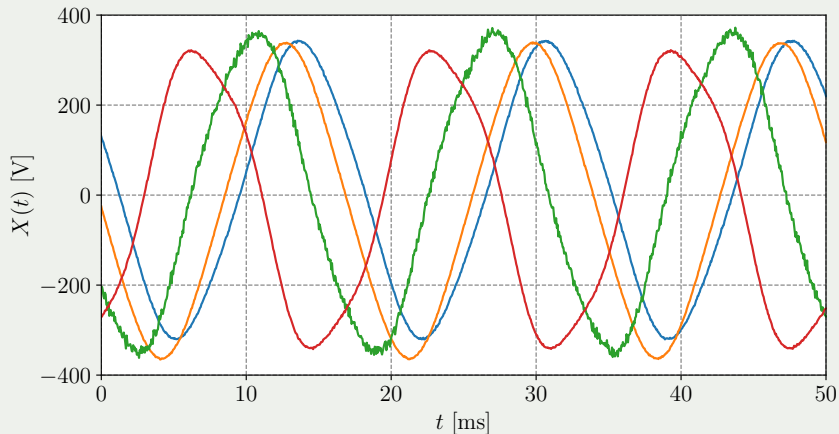
Forma de onda de tensão de uma rede elétrica (220 V e 60 Hz).



Forma de onda de tensão de uma rede elétrica (220 V e 60 Hz).

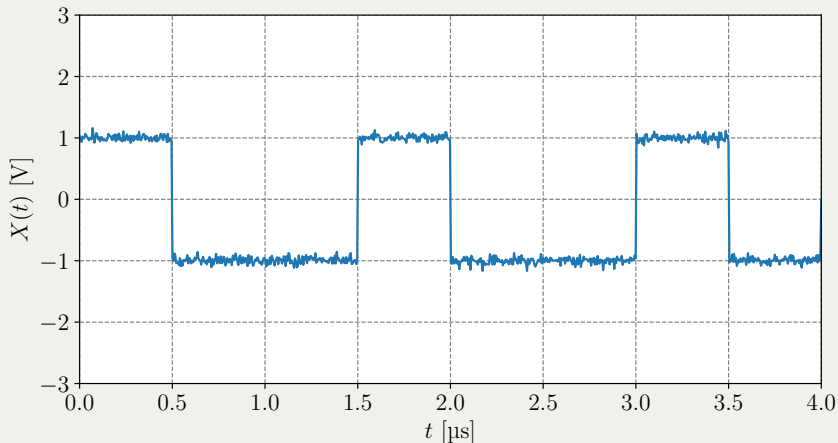


Forma de onda de tensão de uma rede elétrica (220 V e 60 Hz).



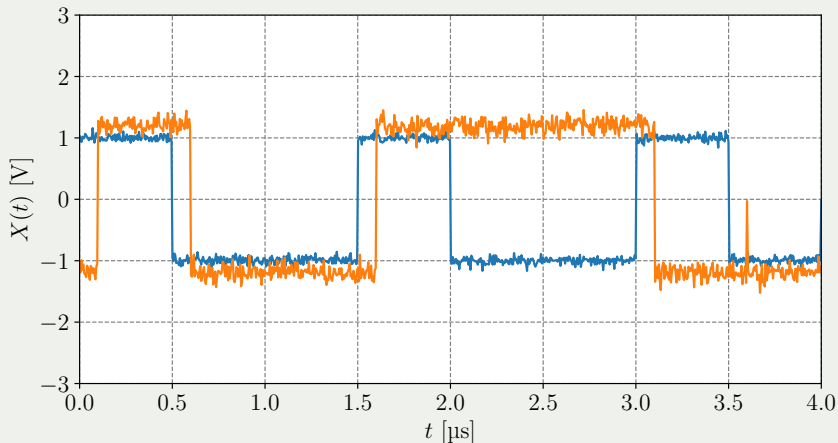
# Exemplos de processos estocásticos

Sinal recebido em um sistema de comunicação ( $\pm 1$  V e 2 Mbit/s).



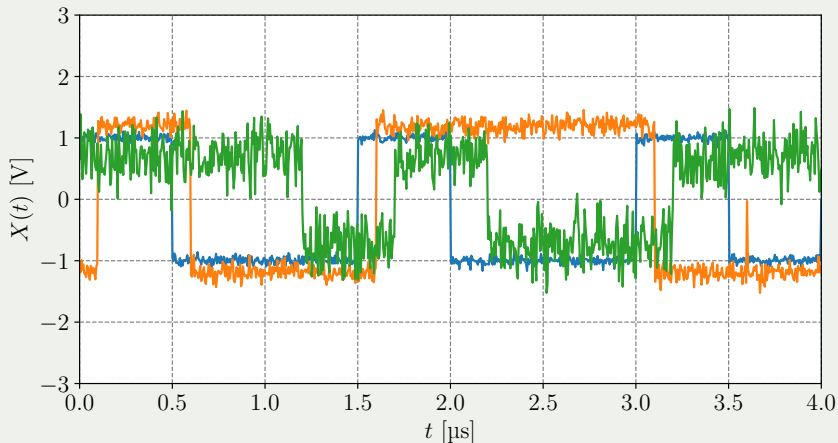
# Exemplos de processos estocásticos

Sinal recebido em um sistema de comunicação ( $\pm 1$  V e 2 Mbit/s).



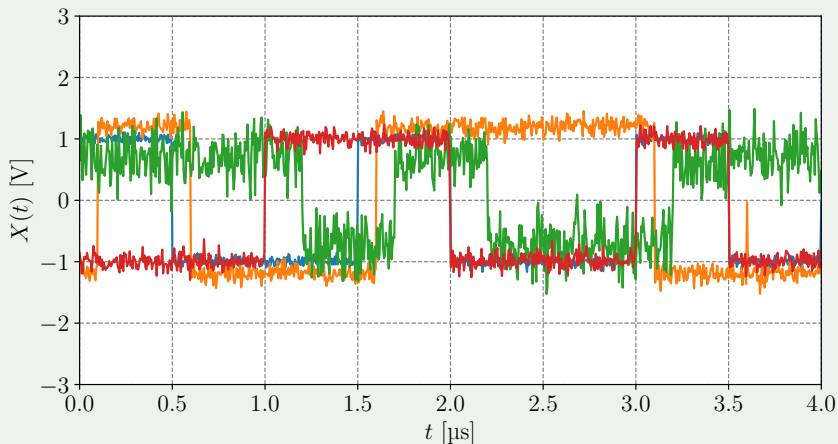
# Exemplos de processos estocásticos

Sinal recebido em um sistema de comunicação ( $\pm 1$  V e 2 Mbit/s).



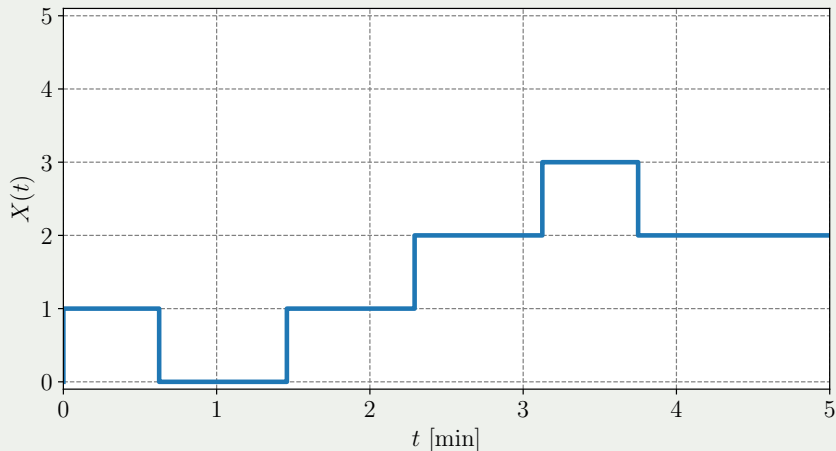
# Exemplos de processos estocásticos

Sinal recebido em um sistema de comunicação ( $\pm 1$  V e 2 Mbit/s).



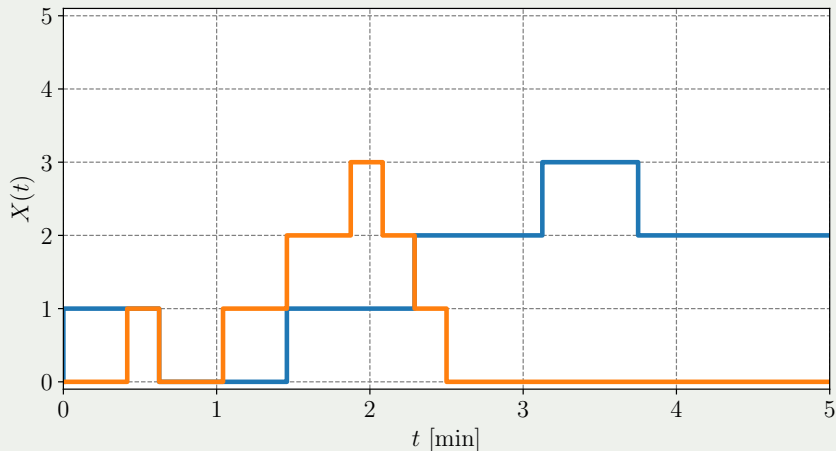
# Exemplos de processos estocásticos

Número de clientes em uma fila.



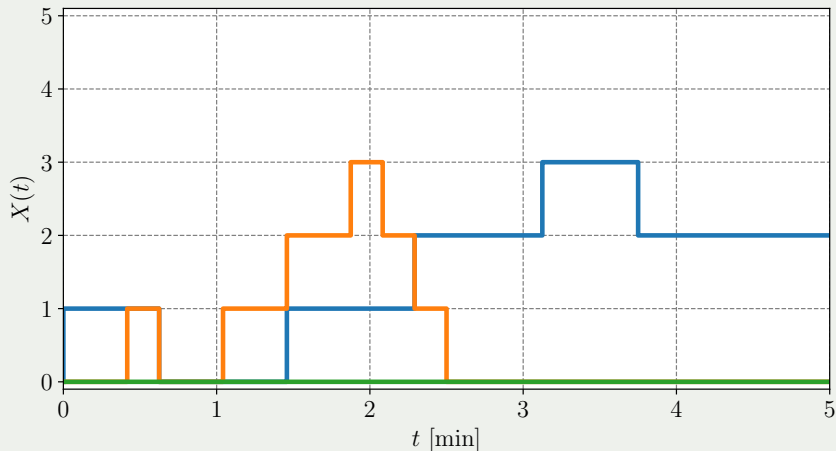
# Exemplos de processos estocásticos

Número de clientes em uma fila.



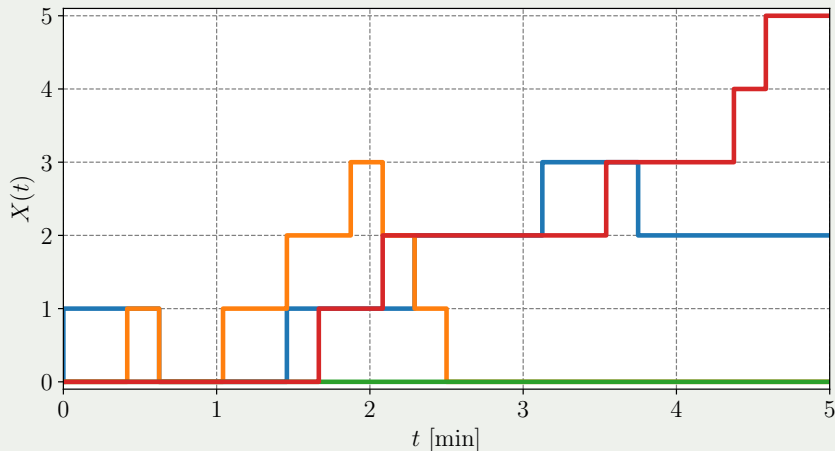
# Exemplos de processos estocásticos

Número de clientes em uma fila.

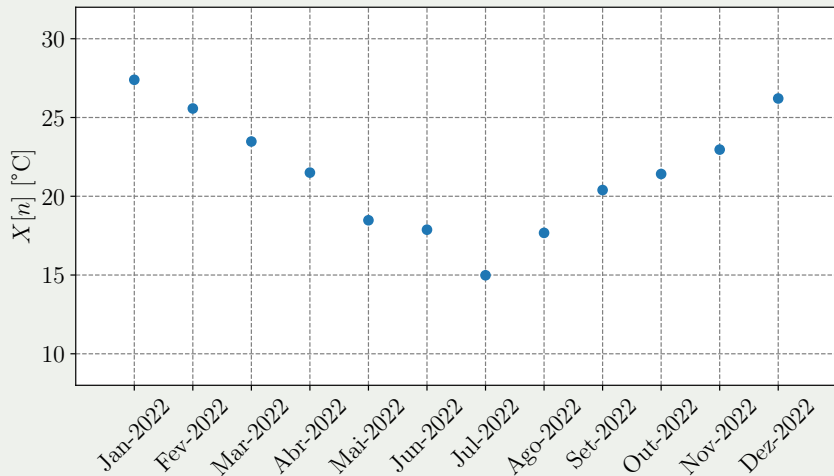


# Exemplos de processos estocásticos

Número de clientes em uma fila.

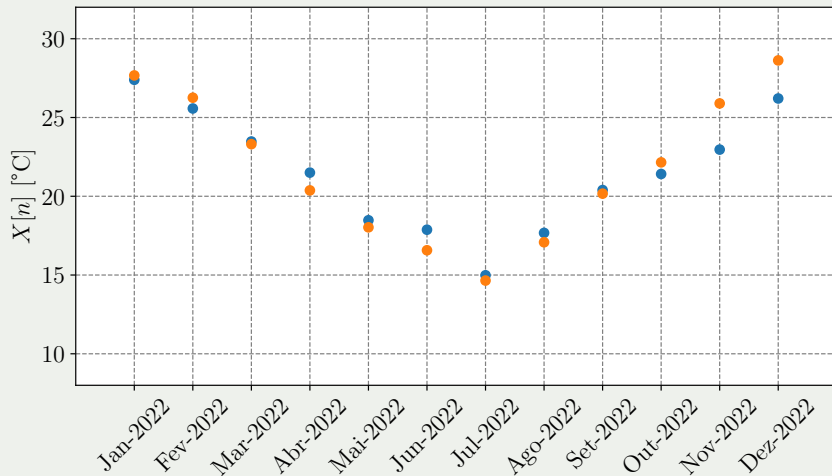


Temperatura média mensal em uma região.



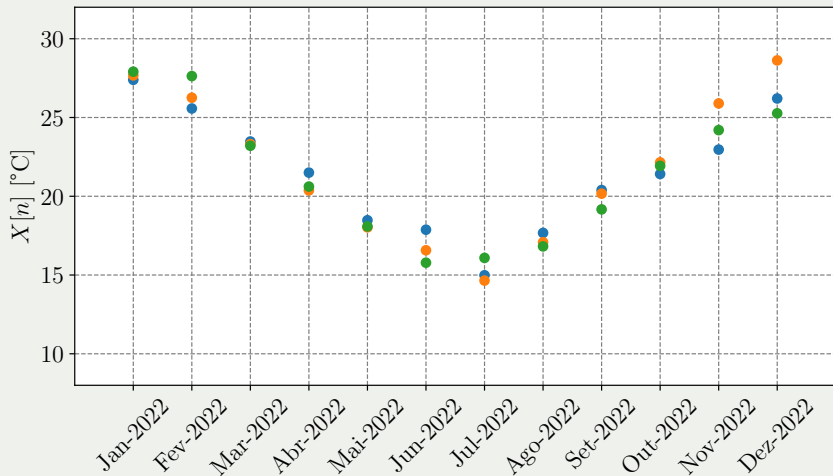
# Exemplos de processos estocásticos

Temperatura média mensal em uma região.



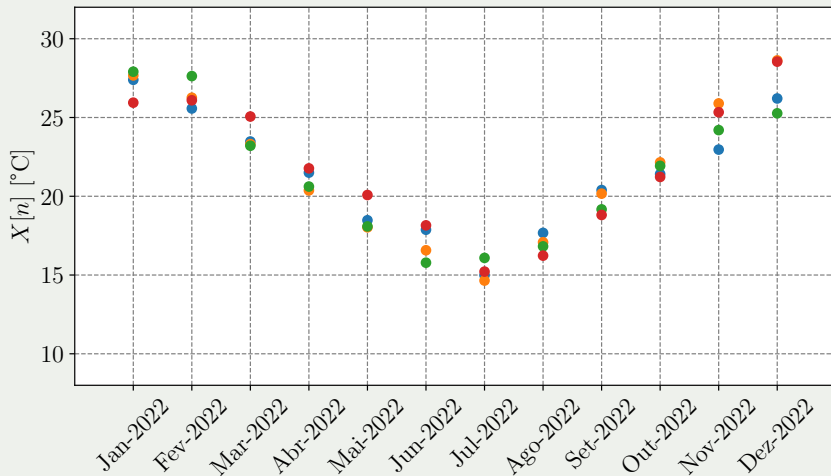
# Exemplos de processos estocásticos

Temperatura média mensal em uma região.



# Exemplos de processos estocásticos

Temperatura média mensal em uma região.



# PDFs de um processo estocástico

## Definição

A **PDF de primeira ordem** de um processo estocástico  $X(t)$  é dada por

$$f_{X(t)}(x)$$



A PDF de primeira ordem pode ser interpretada como uma **família de PDFs** indexada pelo tempo  $t$ .



## Exemplo

Sejam  $A, B \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(0, 1)$  e considere o PE

$$X(t) = (B - A)t + A,$$

definido para  $t \in [0, 1]$ .

- a** Esboce algumas funções-amostra de  $X(t)$ .
- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .



- a Esboce algumas funções-amostra de  $X(t)$ .



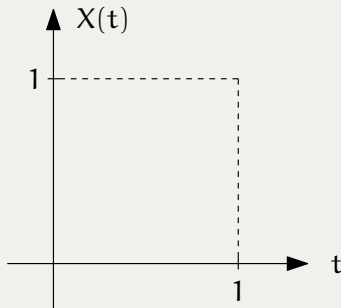
- a** Esboce algumas funções-amostra de  $X(t)$ .

$$X(t) = (B - A)t + A, \quad A, B \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(0, 1)$$



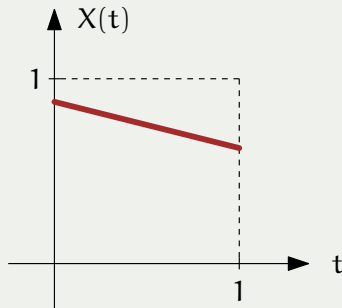
- a** Esboce algumas funções-amostra de  $X(t)$ .

$$X(t) = (B - A)t + A, \quad A, B \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(0, 1)$$



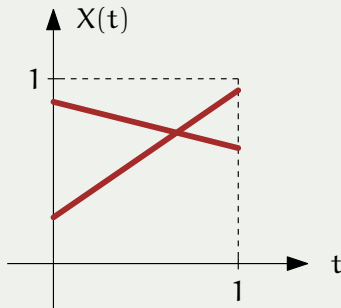
- a** Esboce algumas funções-amostra de  $X(t)$ .

$$X(t) = (B - A)t + A, \quad A, B \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(0, 1)$$



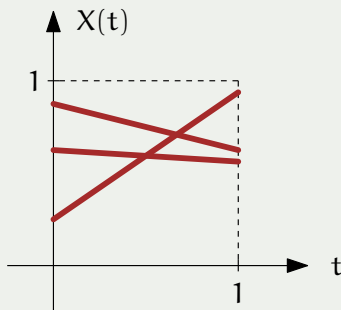
- a Esboce algumas funções-amostra de  $X(t)$ .

$$X(t) = (B - A)t + A, \quad A, B \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(0, 1)$$



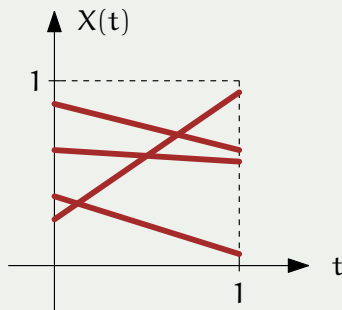
**a** Esboce algumas funções-amostra de  $X(t)$ .

$$X(t) = (B - A)t + A, \quad A, B \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(0, 1)$$



- a Esboce algumas funções-amostra de  $X(t)$ .

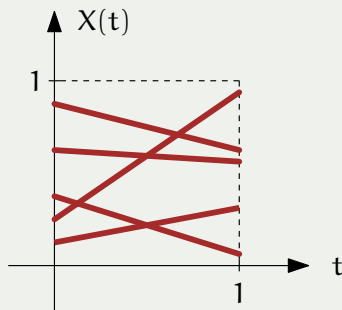
$$X(t) = (B - A)t + A, \quad A, B \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(0, 1)$$



# Exemplo

**a** Esboce algumas funções-amostra de  $X(t)$ .

$$X(t) = (B - A)t + A, \quad A, B \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(0, 1)$$



- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .



Parênteses: Soma de variáveis aleatórias independentes.

## Teorema [Yates, Cap. 6]

Sejam  $X$  e  $Y$  duas VAs independentes. Então, a PDF de  $W = X + Y$  é dada por

$$f_W = f_X \star f_Y,$$

em que  $\star$  denota convolução.



- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .



- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

Tem-se

$$X(t) = (B - A)t + A = \underbrace{tB} + \underbrace{(1-t)A}$$



- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

Tem-se

$$X(t) = (B - A)t + A = \underbrace{tB} + \underbrace{(1-t)A}$$

Ou seja,  $X(t)$  é a soma de duas VAs independentes.



- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

Tem-se

$$X(t) = (B - A)t + A = \underbrace{tB}_{\text{Uniform}(0,t)} + \underbrace{(1-t)A}_{\text{Uniform}(0,1-t)}$$

Ou seja,  $X(t)$  é a soma de duas VAs independentes.



- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

Tem-se

$$X(t) = (B - A)t + A = \underbrace{tB}_{\text{Uniform}(0,t)} + \underbrace{(1-t)A}_{\text{Uniform}(0,1-t)}$$

Ou seja,  $X(t)$  é a soma de duas VAs independentes.

Portanto, a PDF de  $X(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} f_{X(t)}(x) &= \frac{1}{t} [0 \leq x \leq t] * \frac{1}{1-t} [0 \leq x \leq 1-t] \\ &= \frac{1}{t(1-t)} \left( [0 \leq x \leq t] * [0 \leq x \leq 1-t] \right) \end{aligned}$$



# Exemplo

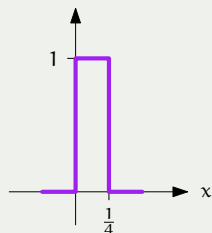
- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

Exemplo para  $t = 1/4$ :



- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

Exemplo para  $t = 1/4$ :

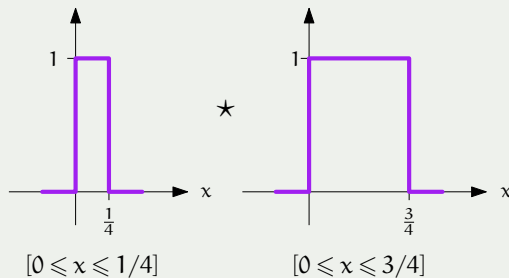


$$[0 \leq x \leq 1/4]$$



- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

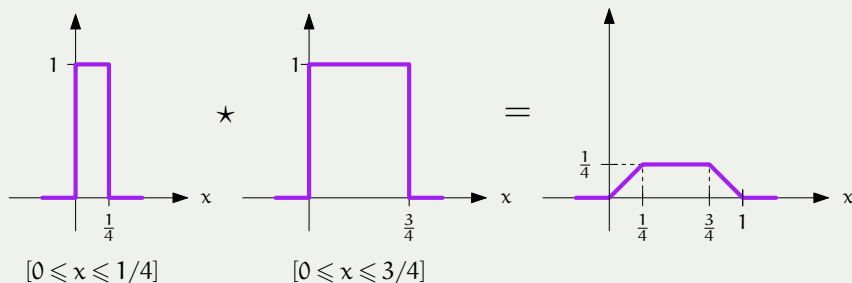
Exemplo para  $t = 1/4$ :



# Exemplo

**b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

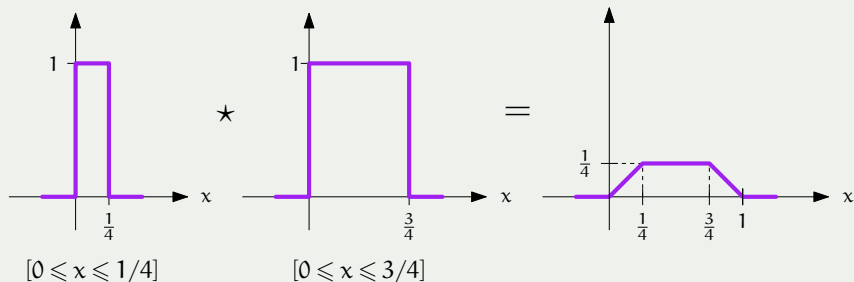
Exemplo para  $t = 1/4$ :



# Exemplo

**b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

Exemplo para  $t = 1/4$ :



$$f_{X(1/4)}(x) = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 1-x, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



- b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

Generalizando: **GeoGebra** 

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{t_m(1-t_m)} \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t_m \\ t_m, & t_m \leq x \leq 1-t_m \\ 1-x, & 1-t_m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

onde  $t_m = \min(t, 1-t)$ .



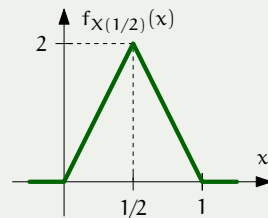
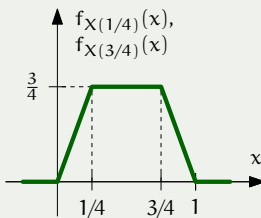
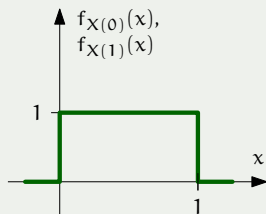
# Exemplo

**b** Determine a PDF de primeira ordem de  $X(t)$ .

Generalizando: **GeoGebra** 

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{t_m(1-t_m)} \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t_m \\ t_m, & t_m \leq x \leq 1-t_m \\ 1-x, & 1-t_m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

onde  $t_m = \min(t, 1-t)$ .



## Definição

A **PDF de segunda ordem** de um processo estocástico  $X(t)$  é dada por

$$f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$$



A PDF de segunda ordem pode ser interpretada como uma **família de PDFs** indexada pelos tempos  $t_1$  e  $t_2$ .



## Exemplo

Sejam  $A, B \stackrel{iid}{\sim} \text{DiscreteUniform}(\{-1, 1\})$  e considere o PE dado por

$$X(t) = A \text{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \text{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

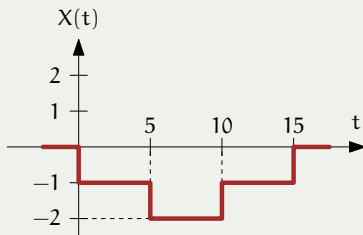
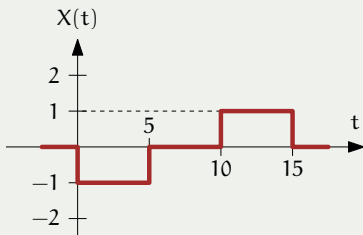
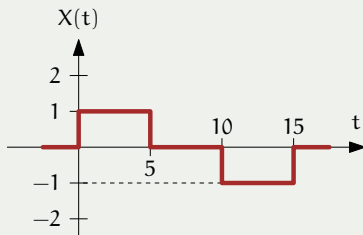
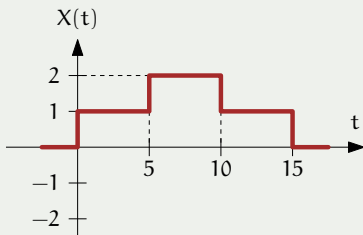
- a** Esboce todas as funções-amostra de  $X(t)$ .
- b** Determine a PMF de primeira ordem de  $X(t)$ .
- c** Determine a PMF de segunda ordem de  $X(t)$ .



- a Esboce todas as funções-amostra de  $X(t)$ .



**a** Esboce todas as funções-amostra de  $X(t)$ .



- b** Determine a PMF de primeira ordem de  $X(t)$ .



- b** Determine a PMF de primeira ordem de  $X(t)$ .

$$X(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$



- b** Determine a PMF de primeira ordem de  $X(t)$ .

$$X(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso  $t < 0$ :  $X(t) = 0$



- b** Determine a PMF de primeira ordem de  $X(t)$ .

$$X(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso  $t < 0$ :  $X(t) = 0$

Caso  $0 < t < 5$ :  $X(t) = A$



- b** Determine a PMF de primeira ordem de  $X(t)$ .

$$X(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso  $t < 0$ :  $X(t) = 0$

Caso  $0 < t < 5$ :  $X(t) = A$

Caso  $5 < t < 10$ :  $X(t) = A + B$



**b** Determine a PMF de primeira ordem de  $X(t)$ .

$$X(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso  $t < 0$ :  $X(t) = 0$

Caso  $0 < t < 5$ :  $X(t) = A$

Caso  $5 < t < 10$ :  $X(t) = A + B$

Caso  $10 < t < 15$ :  $X(t) = B$



**b** Determine a PMF de primeira ordem de  $X(t)$ .

$$X(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso  $t < 0$ :  $X(t) = 0$

Caso  $0 < t < 5$ :  $X(t) = A$

Caso  $5 < t < 10$ :  $X(t) = A + B$

Caso  $10 < t < 15$ :  $X(t) = B$

Caso  $t > 15$ :  $X(t) = 0$



**b** Determine a PMF de primeira ordem de  $X(t)$ .

$$X(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso  $t < 0$ :  $X(t) = 0$

Caso  $0 < t < 5$ :  $X(t) = A$

Caso  $5 < t < 10$ :  $X(t) = A + B$

Caso  $10 < t < 15$ :  $X(t) = B$

Caso  $t > 15$ :  $X(t) = 0$

Portanto: **GeoGebra** 

$$p_{X(t)}(x) = \begin{cases} \delta[x], & t < 0 \text{ ou } t > 15 \\ \frac{1}{2}\delta[x+1] + \frac{1}{2}\delta[x-1], & 0 < t < 5 \text{ ou } 10 < t < 15 \\ \frac{1}{4}\delta[x+2] + \frac{1}{2}\delta[x] + \frac{1}{4}\delta[x-2], & 5 < t < 10 \end{cases}$$



- c Determine a PMF de segunda ordem de  $X(t)$ .



**c** Determine a PMF de segunda ordem de  $X(t)$ .

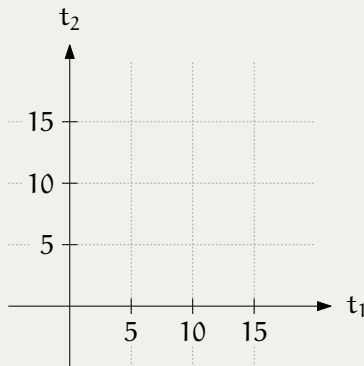
Deseja-se  $p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ .



# Exemplo

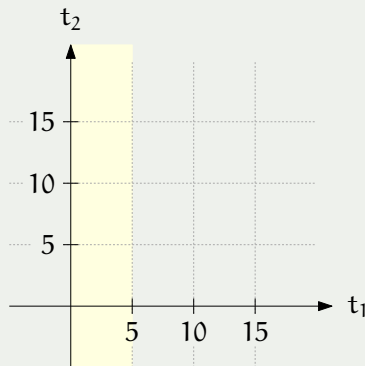
**c** Determine a PMF de segunda ordem de  $X(t)$ .

Deseja-se  $p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ . Há 25 casos possíveis para  $t_1$  e  $t_2$ .



**c** Determine a PMF de segunda ordem de  $X(t)$ .

Deseja-se  $p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ . Há 25 casos possíveis para  $t_1$  e  $t_2$ . Como exemplo, consideraremos apenas os casos em que  $0 < t_1 < 5$ .



**c** Determine a PMF de segunda ordem de  $X(t)$ .

Caso  $0 < t_1 < 5$  e  $0 < t_2 < 5$ :

$$X(t_1) = A \quad \text{e} \quad X(t_2) = A$$

| $p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ |            |            |           |            |            |
|--------------------------------|------------|------------|-----------|------------|------------|
|                                | $x_2 = -2$ | $x_2 = -1$ | $x_2 = 0$ | $x_2 = +1$ | $x_2 = +2$ |
| $x_1 = -2$                     | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |
| $x_1 = -1$                     | 0          | 1/2        | 0         | 0          | 0          |
| $x_1 = 0$                      | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |
| $x_1 = +1$                     | 0          | 0          | 0         | 1/2        | 0          |
| $x_1 = +2$                     | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |



**c** Determine a PMF de segunda ordem de  $X(t)$ .

Caso  $0 < t_1 < 5$  e  $5 < t_2 < 10$ :

$$X(t_1) = A \quad \text{e} \quad X(t_2) = A + B$$

| $p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ |            |            |           |            |            |
|--------------------------------|------------|------------|-----------|------------|------------|
|                                | $x_2 = -2$ | $x_2 = -1$ | $x_2 = 0$ | $x_2 = +1$ | $x_2 = +2$ |
| $x_1 = -2$                     | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |
| $x_1 = -1$                     | 1/4        | 0          | 1/4       | 0          | 0          |
| $x_1 = 0$                      | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |
| $x_1 = +1$                     | 0          | 0          | 1/4       | 0          | 1/4        |
| $x_1 = +2$                     | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |



**c** Determine a PMF de segunda ordem de  $X(t)$ .

Caso  $0 < t_1 < 5$  e  $10 < t_2 < 15$ :

$$X(t_1) = A \quad \text{e} \quad X(t_2) = B$$

| $p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ |            |            |           |            |            |
|--------------------------------|------------|------------|-----------|------------|------------|
|                                | $x_2 = -2$ | $x_2 = -1$ | $x_2 = 0$ | $x_2 = +1$ | $x_2 = +2$ |
| $x_1 = -2$                     | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |
| $x_1 = -1$                     | 0          | 1/4        | 0         | 1/4        | 0          |
| $x_1 = 0$                      | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |
| $x_1 = +1$                     | 0          | 1/4        | 0         | 1/4        | 0          |
| $x_1 = +2$                     | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |



**c** Determine a PMF de segunda ordem de  $X(t)$ .

Caso  $0 < t_1 < 5$  e ( $t_2 < 0$  ou  $t_2 > 15$ ):

$$X(t_1) = A \quad \text{e} \quad X(t_2) = 0$$

| $p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ |            |            |           |            |            |
|--------------------------------|------------|------------|-----------|------------|------------|
|                                | $x_2 = -2$ | $x_2 = -1$ | $x_2 = 0$ | $x_2 = +1$ | $x_2 = +2$ |
| $x_1 = -2$                     | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |
| $x_1 = -1$                     | 0          | 0          | 1/2       | 0          | 0          |
| $x_1 = 0$                      | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |
| $x_1 = +1$                     | 0          | 0          | 1/2       | 0          | 0          |
| $x_1 = +2$                     | 0          | 0          | 0         | 0          | 0          |



## Definição

A **PDF de ordem k** de um processo estocástico  $X(t)$  é a família de PDFs

$$f_{X(t_1), \dots, X(t_k)}(x_1, \dots, x_k), \quad \forall t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$$

Note que PDF de ordem k depende dos tempos  $t_1, t_2, \dots, t_k$ .



Um processo estocástico é dito estar **completamente especificado** se sua distribuição de ordem k for conhecida para todo k (na forma de PDF, PMF ou CDF).



# Função média e função autocovariância

Seja  $X(t)$  um processo estocástico.

## Definição

A **função média** de  $X(t)$  é definida por

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

e a **função autocovariância** de  $X(t)$  é definida por

$$C_X(t_1, t_2) = \text{cov}[X(t_1), X(t_2)]$$



# Definição

Seja  $X(t)$  um processo estocástico.

## Definição

A **função média** de  $X(t)$  é definida por

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

e a **função autocovariância** de  $X(t)$  é definida por

$$C_X(t_1, t_2) = \text{cov}[X(t_1), X(t_2)]$$

*Obs:* Define-se também a **função variância**:

$$\sigma_X^2(t) = \text{var}[X(t)] = C_X(t, t)$$



### Exemplo

Considere um PE  $X(t)$  dado por

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5)$$

onde  $B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$ .

- a** Determine a função média de  $X(t)$ .
- b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .



## Exemplo: Sinal representando dois bits

- a Determine a função média de  $X(t)$ .



## Exemplo: Sinal representando dois bits

- a Determine a função média de  $X(t)$ .

Serão apresentadas duas soluções.



## Exemplo: Sinal representando dois bits

**Solução 1.** A partir dos sinais-amostra.

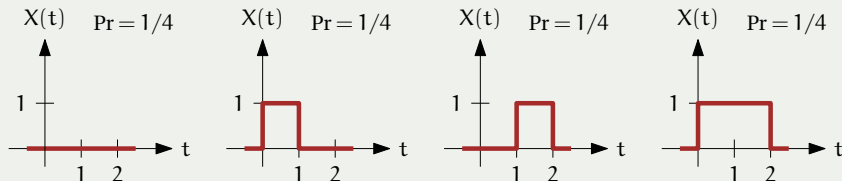
$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$



## Exemplo: Sinal representando dois bits

**Solução 1.** A partir dos sinais-amostra.

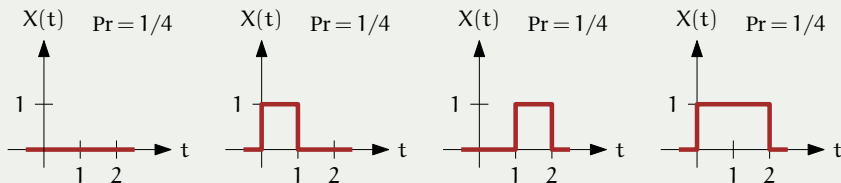
$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$



## Exemplo: Sinal representando dois bits

**Solução 1.** A partir dos sinais-amostra.

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$



$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}[0 \leq t < 1] + \frac{1}{4}[1 \leq t < 2] + \frac{1}{4}[0 \leq t < 2] \\ &= \frac{1}{2}[0 \leq t < 2] \end{aligned}$$



## Exemplo: Sinal representando dois bits

**Solução 2.** A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$



## Exemplo: Sinal representando dois bits

**Solução 2.** A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$



**Solução 2.** A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5)] \end{aligned}$$



**Solução 2.** A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5)] \\ &= E[B_1] \text{rect}(t - 0,5) + E[B_2] \text{rect}(t - 1,5)\end{aligned}$$



**Solução 2.** A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5)] \\ &= E[B_1] \text{rect}(t - 0,5) + E[B_2] \text{rect}(t - 1,5) \\ &= \frac{1}{2} \text{rect}(t - 0,5) + \frac{1}{2} \text{rect}(t - 1,5)\end{aligned}$$



**Solução 2.** A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5)] \\ &= E[B_1] \text{rect}(t - 0,5) + E[B_2] \text{rect}(t - 1,5) \\ &= \frac{1}{2} \text{rect}(t - 0,5) + \frac{1}{2} \text{rect}(t - 1,5) \\ &= \frac{1}{2} [0 \leq t < 2]\end{aligned}$$

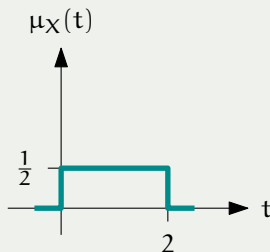


## Exemplo: Sinal representando dois bits

**a** Determine a função média de  $X(t)$ .

Portanto,

$$\mu_X(t) = \frac{1}{2}[0 \leq t < 2] = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$



**b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$



**b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$

Caso  $t_1$  e  $t_2$  estiverem no mesmo intervalo de bit:

$$C_X(t_1, t_2) = \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] = \text{cov}[B_i, B_i] = \text{var}[B_i] = \frac{1}{4}$$



**b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$

Caso  $t_1$  e  $t_2$  estiverem no mesmo intervalo de bit:

$$C_X(t_1, t_2) = \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] = \text{cov}[B_i, B_i] = \text{var}[B_i] = \frac{1}{4}$$

Caso  $t_1$  e  $t_2$  estiverem em intervalos de bits diferentes:

$$C_X(t_1, t_2) = \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] = \text{cov}[B_i, B_j] = 0$$

$\downarrow$   
 $i$



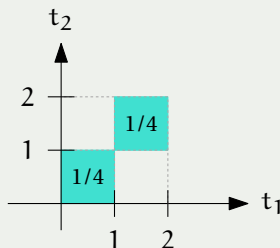
## Exemplo: Sinal representando dois bits

**b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5), \quad B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$$

Portanto,

$$C_X(t_1, t_2) = \frac{1}{4} [\lfloor t_1 \rfloor = \lfloor t_2 \rfloor]$$



### Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a \cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $f_0$  são constantes e  $\Theta \sim \text{Uniform}(-\pi, \pi)$ .

- a** Determine a função média de  $X(t)$ .
- b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .



## Exemplo: Cosseno com fase aleatória

- a Determine a função média de  $X(t)$ .



- a** Determine a função média de  $X(t)$ .

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$



**a** Determine a função média de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[a \cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b]\end{aligned}$$



**a** Determine a função média de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[a \cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b] \\ &= a E[\cos(2\pi f_0 t - \Theta)] + b\end{aligned}$$



**a** Determine a função média de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[a \cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b] \\ &= a E[\cos(2\pi f_0 t - \Theta)] + b \\ &= a E[\cos(2\pi f_0 t) \cos(\Theta) + \sin(2\pi f_0 t) \sin(\Theta)] + b\end{aligned}$$



**a** Determine a função média de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[a \cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b] \\ &= a E[\cos(2\pi f_0 t - \Theta)] + b \\ &= a E[\cos(2\pi f_0 t) \cos(\Theta) + \sin(2\pi f_0 t) \sin(\Theta)] + b \\ &= a \cos(2\pi f_0 t) E[\cos(\Theta)] + a \sin(2\pi f_0 t) E[\sin(\Theta)] + b\end{aligned}$$



**a** Determine a função média de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[a \cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b] \\ &= a E[\cos(2\pi f_0 t - \Theta)] + b \\ &= a E[\cos(2\pi f_0 t) \cos(\Theta) + \sin(2\pi f_0 t) \sin(\Theta)] + b \\ &= a \cos(2\pi f_0 t) E[\cos(\Theta)] + a \sin(2\pi f_0 t) E[\sin(\Theta)] + b\end{aligned}$$

$$E[\cos(\Theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0.$$

$$E[\sin(\Theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0.$$



**a** Determine a função média de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[a \cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b] \\ &= a E[\cos(2\pi f_0 t - \Theta)] + b \\ &= a E[\cos(2\pi f_0 t) \cos(\Theta) + \sin(2\pi f_0 t) \sin(\Theta)] + b \\ &= a \cos(2\pi f_0 t) E[\cos(\Theta)] + a \sin(2\pi f_0 t) E[\sin(\Theta)] + b \\ &= b.\end{aligned}$$

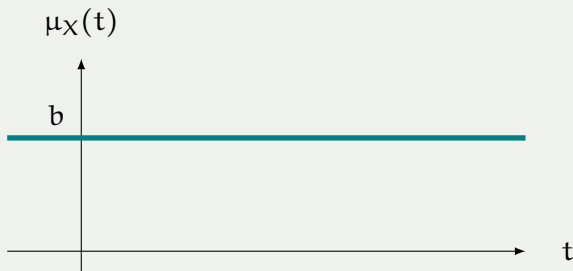
$$E[\cos(\Theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0.$$

$$E[\sin(\Theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0.$$



## Exemplo: Cosseno com fase aleatória

a Determine a função média de  $X(t)$ .



## Exemplo: Cosseno com fase aleatória

- b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .



- b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .

$$C_X(t_1, t_2) = \text{cov}[X(t_1), X(t_2)]$$



- b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}C_X(t_1, t_2) &= \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\&= E\left[\left(X(t_1) - \mu_X(t_1)\right) \left(X(t_2) - \mu_X(t_2)\right)\right]\end{aligned}$$



**b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}C_X(t_1, t_2) &= \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\&= E\left[\left(X(t_1) - \mu_X(t_1)\right) \left(X(t_2) - \mu_X(t_2)\right)\right] \\&= E\left[a \cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta) a \cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\right]\end{aligned}$$



**b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}C_X(t_1, t_2) &= \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\&= E\left[\left(X(t_1) - \mu_X(t_1)\right) \left(X(t_2) - \mu_X(t_2)\right)\right] \\&= E\left[a \cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta) a \cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\right] \\&= a^2 E\left[\cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta) \cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\right]\end{aligned}$$



**b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}C_X(t_1, t_2) &= \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\&= E\left[\left(X(t_1) - \mu_X(t_1)\right) \left(X(t_2) - \mu_X(t_2)\right)\right] \\&= E\left[a \cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta) a \cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\right] \\&= a^2 E\left[\cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta) \cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\right] \\&= \frac{a^2}{2} E\left[\cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1)) + \cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2) - 2\Theta)\right]\end{aligned}$$



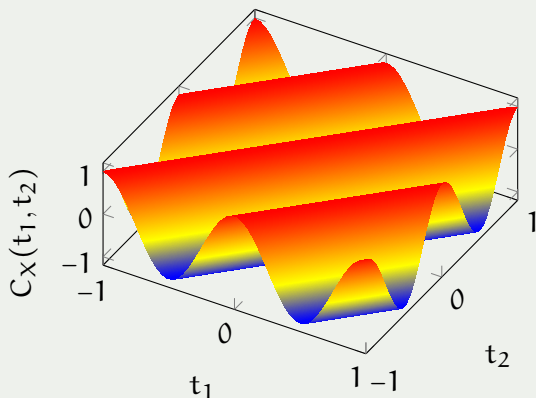
**b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}C_X(t_1, t_2) &= \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\&= E\left[\left(X(t_1) - \mu_X(t_1)\right)\left(X(t_2) - \mu_X(t_2)\right)\right] \\&= E\left[a \cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta) a \cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\right] \\&= a^2 E\left[\cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta) \cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\right] \\&= \frac{a^2}{2} E\left[\cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1)) + \cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2) - 2\Theta)\right] \\&= \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1))\end{aligned}$$



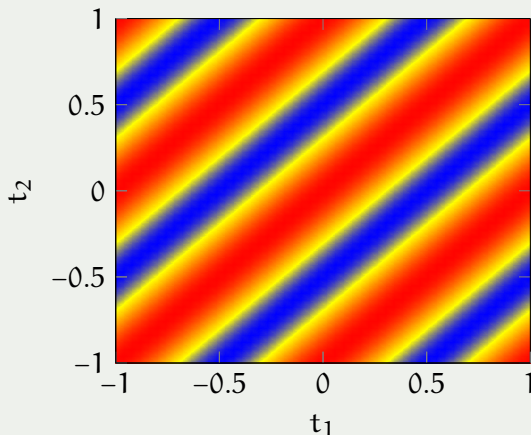
## Exemplo: Cosseno com fase aleatória

- b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .



## Exemplo: Cosseno com fase aleatória

**b** Determine a função autocovariância de  $X(t)$ .



## Exemplo

Seja  $B[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$  uma sequência de bits aleatórios. Seja

$$X[n] = \begin{cases} 0, & \text{se } B[n] = 0, \\ \pm 1, & \text{alternadamente, se } B[n] = 1. \end{cases}$$

- a Determine a função média de  $X[n]$ .
- b Determine a função autocovariância de  $X[n]$ .

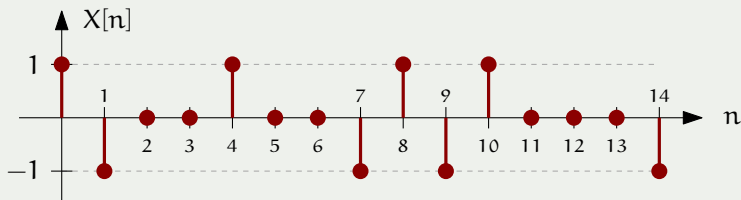
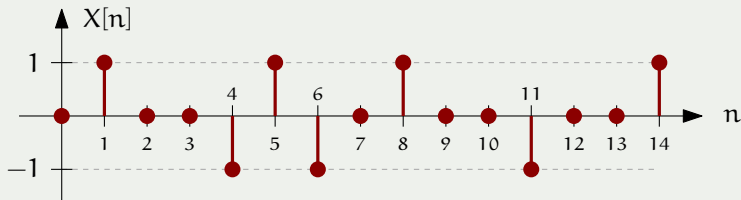


*Alternate Mark Inversion*



# Exemplo: Sinalização AMI

Exemplos de sinais amostra:



## Exemplo: Sinalização AMI

- a Determine a função média de  $X[n]$ .



- a Determine a função média de  $X[n]$ .

$$\mu_X[n] = E[X[n]]$$



- a** Determine a função média de  $X[n]$ .

$$\begin{aligned}\mu_X[n] &= E[X[n]] \\ &= (-1)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{4}\end{aligned}$$



**a** Determine a função média de  $X[n]$ .

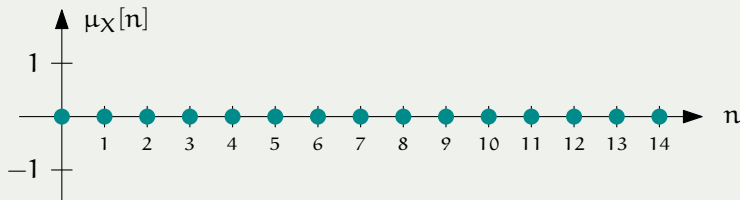
$$\begin{aligned}\mu_X[n] &= E[X[n]] \\ &= (-1)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$



## Exemplo: Sinalização AMI

a Determine a função média de  $X[n]$ .

$$\begin{aligned}\mu_X[n] &= E[X[n]] \\ &= (-1)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$



- b** Determine a função autocovariância de  $X[n]$ .

$$C_X[n_1, n_2] = \text{cov}[X[n_1], X[n_2]] = E[X[n_1]X[n_2]]$$



- b** Determine a função autocovariância de  $X[n]$ .

Caso  $n_2 = n_1$ :

$$\begin{aligned}C_X[n, n] &= E[X^2[n]] \\&= (-1)^2 \frac{1}{4} + (0)^2 \frac{1}{2} + (1)^2 \frac{1}{4} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$



**b** Determine a função autocovariância de  $X[n]$ .

$$\text{Caso } n_2 = n_1: \quad C_X[n, n] = +\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} C_X[n, n] &= E[X^2[n]] \\ &= (-1)^2 \frac{1}{4} + (0)^2 \frac{1}{2} + (1)^2 \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



**b** Determine a função autocovariância de  $X[n]$ .

Caso  $n_2 = n_1 \pm 1$ :

| Bits | $X[n]$ | $X[n + 1]$ | Pr  | $X[n]X[n + 1]$ Pr |
|------|--------|------------|-----|-------------------|
| 00   | 0      | 0          | 1/4 | 0                 |
| 01   | 0      | +1         | 1/8 | 0                 |
|      | 0      | -1         | 1/8 | 0                 |
| 10   | +1     | 0          | 1/8 | 0                 |
|      | -1     | 0          | 1/8 | 0                 |
| 11   | +1     | -1         | 1/8 | -1/8              |
|      | -1     | +1         | 1/8 | -1/8              |



**b** Determine a função autocovariância de  $X[n]$ .

$$\text{Caso } n_2 = n_1 \pm 1: \quad C_X[n, n \pm 1] = -\frac{1}{4}$$

| Bits | $X[n]$ | $X[n + 1]$ | Pr  | $X[n]X[n + 1]$ Pr |
|------|--------|------------|-----|-------------------|
| 00   | 0      | 0          | 1/4 | 0                 |
|      | 0      | 0          |     |                   |
| 01   | 0      | +1         | 1/8 | 0                 |
|      | 0      | -1         | 1/8 | 0                 |
| 10   | +1     | 0          | 1/8 | 0                 |
|      | -1     | 0          | 1/8 | 0                 |
| 11   | +1     | -1         | 1/8 | -1/8              |
|      | -1     | +1         | 1/8 | -1/8              |



**b** Determine a função autocovariância de  $X[n]$ .

Caso  $n_2 = n_1 \pm 2$ :

| Bits     | $X[n]$ | $X[n + 1]$ | $X[n + 2]$ | Pr   | $X[n]X[n + 2]$ Pr |
|----------|--------|------------|------------|------|-------------------|
| 101      | +1     | 0          | -1         | 1/16 | -1/16             |
|          | -1     | 0          | +1         | 1/16 | -1/16             |
| 111      | +1     | -1         | +1         | 1/16 | +1/16             |
|          | -1     | +1         | -1         | 1/16 | +1/16             |
| (outros) | *      | *          | *          | *    | 0                 |



**b** Determine a função autocovariância de  $X[n]$ .

Caso  $n_2 = n_1 \pm 2$ :  $C_X[n, n \pm 2] = 0$

| Bits     | $X[n]$ | $X[n + 1]$ | $X[n + 2]$ | Pr   | $X[n]X[n + 2]$ Pr |
|----------|--------|------------|------------|------|-------------------|
| 101      | +1     | 0          | -1         | 1/16 | -1/16             |
|          | -1     | 0          | +1         | 1/16 | -1/16             |
| 111      | +1     | -1         | +1         | 1/16 | +1/16             |
|          | -1     | +1         | -1         | 1/16 | +1/16             |
| (outros) | *      | *          | *          | *    | 0                 |



**b** Determine a função autocovariância de  $X[n]$ .

Para  $n_2 = n_1 \pm \ell$ , com  $\ell \geq 2$ :  $C_X[n, n \pm \ell] = 0$  (Por que?)

Assim,

$$C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{se } n_2 = n_1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } n_2 = n_1 \pm 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



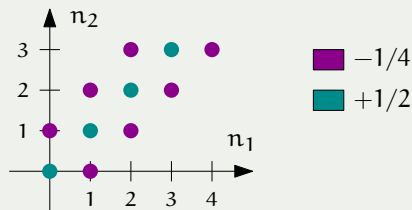
## Exemplo: Sinalização AMI

**b** Determine a função autocovariância de  $X[n]$ .

Para  $n_2 = n_1 \pm \ell$ , com  $\ell \geq 2$ :  $C_X[n, n \pm \ell] = 0$  (Por que?)

Assim,

$$C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{se } n_2 = n_1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } n_2 = n_1 \pm 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



# Referências



JOSÉ PAULO DE ALMEIDA ALBUQUERQUE, JOSÉ MAURO PEDRO FORTES, AND WEILER ALVES FINAMORE.

***PROBABILIDADE, VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.***

Editora Interciência, 2008.



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.

***PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.***

Wiley, 3rd edition, 2014.

