

Processos Estocásticos

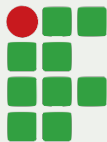
Processos estocásticos estacionários no sentido amplo

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



**INSTITUTO
FEDERAL**
Santa Catarina

Câmpus
São José

Introdução

Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido amplo (ESA)** se

- A função média $\mu_X(t)$ não depende de t .
- A função autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ depende de t_1 e t_2 apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$, e não dos instantes absolutos.



Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido amplo (ESA)** se

- A função média $\mu_X(t)$ não depende de t .
- A função autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ depende de t_1 e t_2 apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$, e não dos instantes absolutos.

Como consequência, define-se

$$\mu_X \triangleq \mu_X(t) \quad C_X(\tau) \triangleq C_X(t, t + \tau) \quad \sigma_X^2 \triangleq C_X(0)$$



Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido amplo (ESA)** se

- A função média $\mu_X(t)$ não depende de t .
- A função autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ depende de t_1 e t_2 apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$, e não dos instantes absolutos.

Como consequência, define-se

$$\mu_X \triangleq \mu_X(t) \quad C_X(\tau) \triangleq C_X(t, t + \tau) \quad \sigma_X^2 \triangleq C_X(0)$$



No caso de tempo discreto, $(t) \rightarrow [n]$ e $(\tau) \rightarrow [\ell]$.



Propriedades da função autocovariância

Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.



Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

1 Função par

$$C_X(\tau) = C_X(-\tau)$$



Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

1 Função par

$$C_X(\tau) = C_X(-\tau)$$

2 Valor na origem

$$C_X(0) = \sigma_X^2$$



Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

1 Função par

$$C_X(\tau) = C_X(-\tau)$$

2 Valor na origem

$$C_X(0) = \sigma_X^2$$

3 Faixa de valores *(desigualdade de Cauchy-Schwarz)*

$$-\sigma_X^2 \leq C_X(\tau) \leq \sigma_X^2$$



Exemplo

Considere um PE $X(t)$ dado por

$$X(t) = B_1 \text{rect}(t - 0,5) + B_2 \text{rect}(t - 1,5)$$

onde $B_1, B_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$.

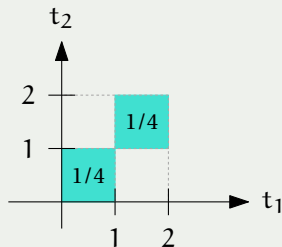
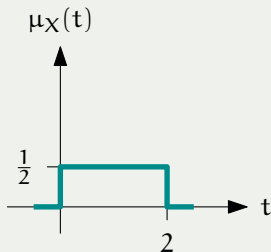


Exemplo revisitado: Sinal representando dois bits

Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = \frac{1}{2} [0 \leq t < 2] \quad \text{e} \quad C_X(t_1, t_2) = \frac{1}{4} [\lfloor t_1 \rfloor = \lfloor t_2 \rfloor]$$

Gráficos:

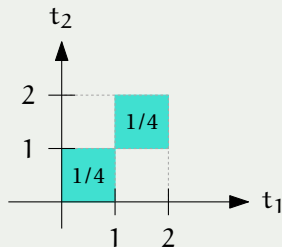
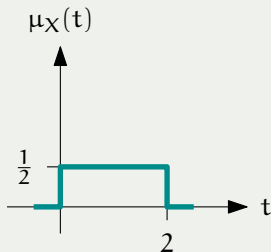


Exemplo revisitado: Sinal representando dois bits

Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = \frac{1}{2} [0 \leq t < 2] \quad \text{e} \quad C_X(t_1, t_2) = \frac{1}{4} [\lfloor t_1 \rfloor = \lfloor t_2 \rfloor]$$

Gráficos:



Portanto, $X(t)$ não é ESA.



Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a \cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que a , b e f_0 são constantes e $\Theta \sim \text{Uniform}(-\pi, \pi)$.



Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = b \quad \text{e} \quad C_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0(t_2 - t_1))$$



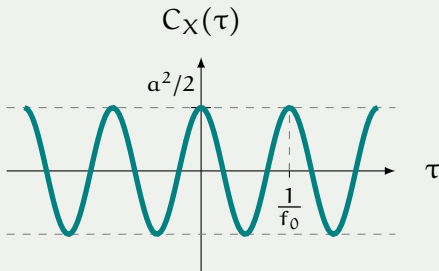
Exemplo revisitado: Cosseno com fase aleatória

Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = b \quad \text{e} \quad C_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0(t_2 - t_1))$$

Portanto, $X(t)$ é ESA e podemos escrever

$$\mu_X = b \quad \text{e} \quad C_X(\tau) = \frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0\tau)$$



Exemplo

Seja $B[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(1/2)$ uma sequência de bits aleatórios. Seja

$$X[n] = \begin{cases} 0, & \text{se } B[n] = 0, \\ \pm 1, & \text{alternadamente, se } B[n] = 1. \end{cases}$$



Já foi mostrado que

$$\mu_X[n] = 0 \quad \text{e} \quad C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{se } n_2 = n_1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } n_2 = n_1 \pm 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

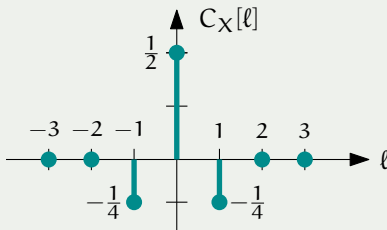


Já foi mostrado que

$$\mu_X[n] = 0 \quad \text{e} \quad C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{se } n_2 = n_1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } n_2 = n_1 \pm 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto, $X[n]$ é ESA e podemos escrever

$$\mu_X = 0 \quad \text{e} \quad C_X[\ell] = \frac{1}{2}\delta[\ell] - \frac{1}{4}\delta[\ell - 1] - \frac{1}{4}\delta[\ell + 1]$$



Exemplo

Seja $X[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ uma sequência aleatória. Defina

$$Y[n] = X[n] + X[n - 1].$$

- a** Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$. Conclua que $X[n]$ é ESA.
- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$. Conclua que $Y[n]$ também é ESA.

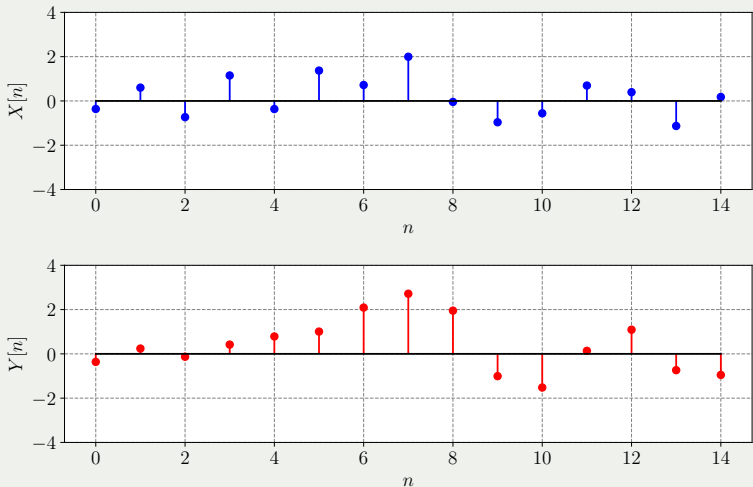


Quando conveniente, usaremos X_n no lugar de $X[n]$.



Exemplo: Filtragem FIR

Exemplo de sequências-amostra:



- a** Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.



- a** Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$$



- a** Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$$

Função média:

$$\mu_X[n] = E[X_n] = 0, \quad \forall n$$



- a** Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$$

Função média:

$$\mu_X[n] = E[X_n] = 0, \quad \forall n$$

Função autocovariância:

$$C_X[n_1, n_2] = \text{cov}[X_{n_1}, X_{n_2}] = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

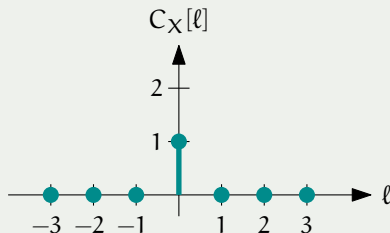


- a Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$$

Portanto, $X[n]$ é ESA com:

$$\mu_X = 0 \quad \text{e} \quad C_X[\ell] = \delta[\ell]$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função média:

$$\mu_Y[n] = E[Y_n]$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função média:

$$\begin{aligned}\mu_Y[n] &= E[Y_n] \\ &= E[X_n + X_{n-1}]\end{aligned}$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função média:

$$\begin{aligned}\mu_Y[n] &= E[Y_n] \\ &= E[X_n + X_{n-1}] \\ &= E[X_n] + E[X_{n-1}]\end{aligned}$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função média:

$$\begin{aligned}\mu_Y[n] &= E[Y_n] \\ &= E[X_n + X_{n-1}] \\ &= E[X_n] + E[X_{n-1}] \\ &= 0\end{aligned}$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$C_Y[n_1, n_2] = \text{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}]$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$\begin{aligned} C_Y[n_1, n_2] &= \text{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\ &= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]} \cancel{E[Y_{n_2}]} \end{aligned}$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$\begin{aligned}C_Y[n_1, n_2] &= \text{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]} \cancel{E[Y_{n_2}]} \\&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})]\end{aligned}$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$\begin{aligned}C_Y[n_1, n_2] &= \text{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]} \cancel{E[Y_{n_2}]} \\&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}]\end{aligned}$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$\begin{aligned}C_Y[n_1, n_2] &= \text{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]} \cancel{E[Y_{n_2}]} \\&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}] \\&= C_X[n_1, n_2] + C_X[n_1, n_2-1] + C_X[n_1-1, n_2] + C_X[n_1-1, n_2-1]\end{aligned}$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$\begin{aligned}C_Y[n_1, n_2] &= \text{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]} \cancel{E[Y_{n_2}]} \\&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}] \\&= C_X[n_1, n_2] + C_X[n_1, n_2-1] + C_X[n_1-1, n_2] + C_X[n_1-1, n_2-1] \\&= C_X[\ell] + C_X[\ell-1] + C_X[\ell+1] + C_X[\ell]\end{aligned}$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

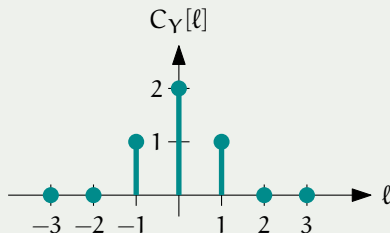
$$\begin{aligned}C_Y[n_1, n_2] &= \text{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]} \cancel{E[Y_{n_2}]} \\&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}] \\&= C_X[n_1, n_2] + C_X[n_1, n_2-1] + C_X[n_1-1, n_2] + C_X[n_1-1, n_2-1] \\&= C_X[\ell] + C_X[\ell-1] + C_X[\ell+1] + C_X[\ell] \\&= 2\delta[\ell] + \delta[\ell-1] + \delta[\ell+1]\end{aligned}$$



- b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Portanto, $Y[n]$ é ESA com:

$$\mu_Y = 0 \quad \text{e} \quad C_Y[\ell] = 2\delta[\ell] + \delta[\ell-1] + \delta[\ell+1]$$



Parênteses

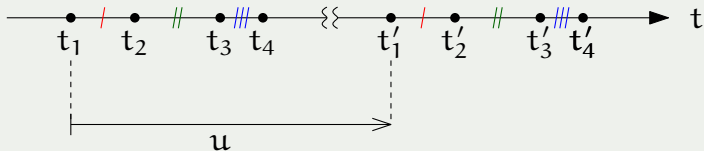
Estacionariedade no sentido estrito

Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido estrito (ESE)** se

$$X(t_1), \dots, X(t_k) \stackrel{d}{=} X(t_1 + u), \dots, X(t_k + u),$$

quaisquer que sejam o inteiro k , os instantes $t_1, \dots, t_k$, e o lapso u , onde $\stackrel{d}{=}$ denota *igualdade em distribuição* (mesma PDF, PMF, etc.).



Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido estrito (ESE)** se

$$X(t_1), \dots, X(t_k) \stackrel{d}{=} X(t_1 + u), \dots, X(t_k + u),$$

quaisquer que sejam o inteiro k , os instantes $t_1, \dots, t_k$, e o lapso u , onde $\stackrel{d}{=}$ denota *igualdade em distribuição* (mesma PDF, PMF, etc.).

Equivalentemente:

- A PDF de 1ª ordem $f_{X(t)}(x)$ não depende de t .
- A PDF de 2ª ordem $f_{X(t_1, t_2)}(x_1, x_2)$ depende de t_1 e t_2 apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$, e não dos instantes absolutos.
- Etc.



Teorema

$$\text{ESE} \implies \text{ESA}$$



Mas a recíproca é falsa!



Exemplo: *Processo estocástico do carnaval*

Seja $X[n]$ uma sequência de VAs i.i.d. que assumem o valor 2 com probabilidade $\frac{1}{5}$ e o valor $-\frac{1}{2}$ com probabilidade $\frac{4}{5}$. Seja $Y[n]$ a sequência aleatória

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

- a** Mostre que $Y[n]$ não é ESE.
- b** Mostre que $Y[n]$ é ESA.



a Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

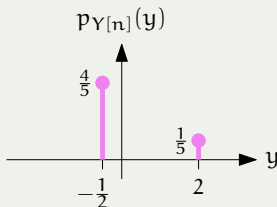
$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$



a Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

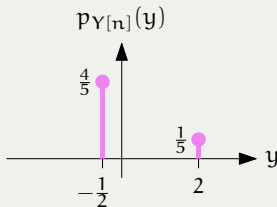
Para n par:



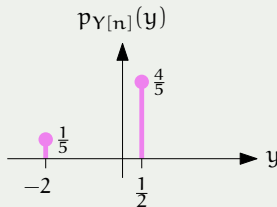
a Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

Para n par:



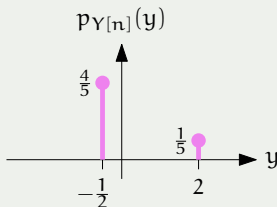
Para n ímpar:



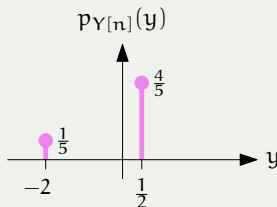
a Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

Para n par:



Para n ímpar:



Portanto, a PMF de 1ª ordem de $Y[n]$ *depende* de n .

Sendo assim, não pode ser ESE.

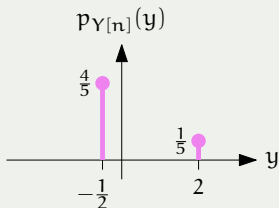


b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

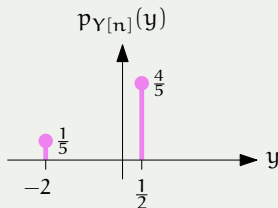


b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para n par:



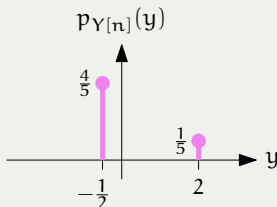
Para n ímpar:



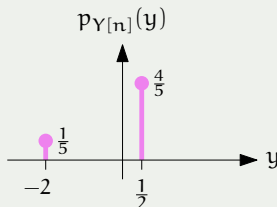
Contraexemplo

b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para n par:



Para n ímpar:



Função média:

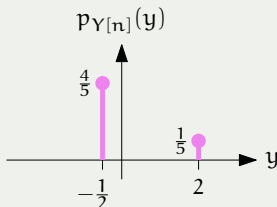
$$\mu_{Y[n]} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{4}{5} + (2) \frac{1}{5}, & n \text{ par} \\ (-2) \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{4}{5}, & n \text{ ímpar} \end{cases} = 0, \quad \forall n \quad \checkmark$$



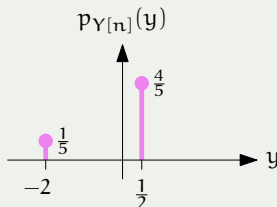
Contraexemplo

b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para n par:



Para n ímpar:



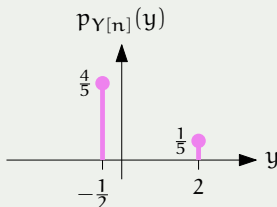
Variância de $Y[n]$:

$$\text{var}[Y[n]] = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{média } 0}}{E[Y[n]^2]} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5} + (2)^2 \frac{1}{5}, & n \text{ par} \\ (-2)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5}, & n \text{ ímpar} \end{cases} = 1, \quad \forall n$$

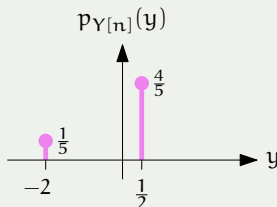


b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para n par:



Para n ímpar:



Função autocovariância:

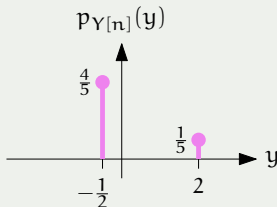
$$C_Y[n_1, n_2] = \begin{cases} \text{var}[Y[n]], & n_1 = n_2 = n \\ \text{cov}[Y[n_1], Y[n_2]], & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$



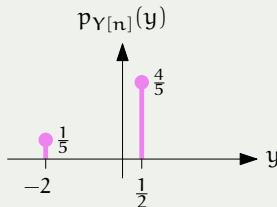
Contraexemplo

b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para n par:



Para n ímpar:



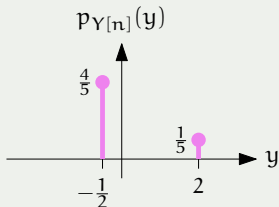
Função autocovariância:

$$C_Y[n_1, n_2] = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases} \quad \checkmark$$

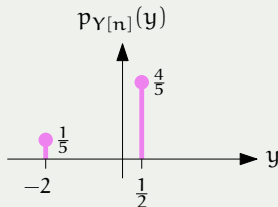


b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para n par:



Para n ímpar:



Portanto, $Y[n]$ é ESA com:

$$\mu_Y = 0 \quad \text{e} \quad C_Y[l] = \delta[l]$$



Análise no domínio da frequência

Seja $x(t)$ um sinal *determinístico*.

Definição

A **transformada de Fourier** de $x(t)$ é dada por

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

A **transformada de Fourier inversa** de $\hat{x}(f)$ é dada por

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{j2\pi ft} df$$



J.-B. Joseph Fourier
(1768–1830)

Diz-se que $x(t)$ e $\hat{x}(f)$ são **pares transformados de Fourier**.



Densidade espectral de potência

Seja $x(t)$ um sinal *determinístico*.

Definição

A **densidade espectral de potência** de $x(t)$ é definida por

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\hat{x}_T(f)|^2,$$

onde $\hat{x}_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$ e $x_T(t)$ é uma versão de $x(t)$ truncada ao intervalo $[-T/2, T/2]$.



Densidade espectral de potência

Seja $X(t)$ um *processo estocástico ESA*.

Definição

A **densidade espectral de potência** de $X(t)$ é definida por

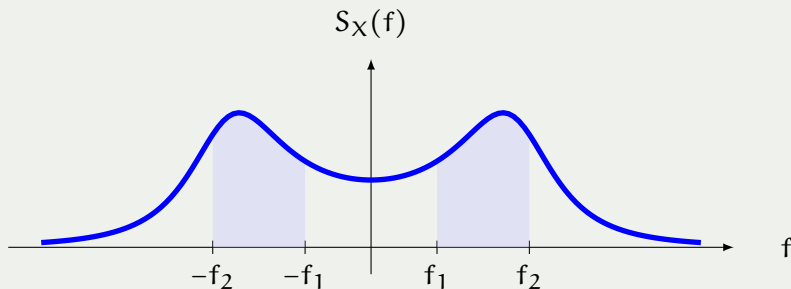
$$S_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} |\hat{X}_T(f)|^2 \right],$$

onde $\hat{X}_T(f) = \mathcal{F}\{X_T(t)\}$ e $X_T(t)$ é uma versão de $X(t)$ truncada ao intervalo $[-T/2, T/2]$.



A densidade espectral de potência é tal que a potência de $X(t)$ na faixa de frequência $[f_1, f_2]$ é dada por

$$P_X^{[f_1, f_2]} = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_X(f) df$$



Propriedades da densidade espectral de potência

Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.



Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

1 Função real

$$\text{Im}\{S_X(f)\} = 0$$



Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

1 Função real

$$\text{Im}\{S_X(f)\} = 0$$

2 Função par

$$S_X(f) = S_X(-f)$$



Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

1 Função real

$$\text{Im}\{S_X(f)\} = 0$$

2 Função par

$$S_X(f) = S_X(-f)$$

3 Função não-negativa

$$S_X(f) \geq 0$$



Teorema de Wiener–Khinchin

Seja $X(t)$ um processo estocástico ESA.

Teorema

$$S_X(f) = \mathcal{F}_\tau \{C_X(\tau) + \mu_X^2\}$$

ou

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{S_X(f)\} - \mu_X^2$$



Ou seja, as funções autocovariância e densidade espectral de potência são pares transformados de Fourier, a menos de um termo constante.



Potência média de um PE ESA

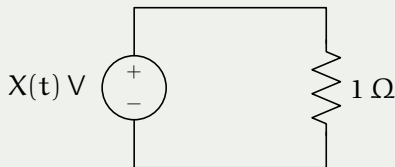
Seja $X(t)$ um processo estocástico (real) ESA.

Definição

A **potência média** de $X(t)$, denotada por P_X , é definida por

$$P_X = E[X^2(t)].$$

Note que P_X é uma constante, pois $X(t)$ é ESA.



Obs: A palavra *média* é no sentido probabilístico, e não temporal.



Teorema

A potência média pode ser calculada no *domínio do tempo* por

$$P_X = C_X(0) + \mu_X^2$$

ou no *domínio da frequência* por

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df.$$

A fórmula no domínio do tempo é comumente escrita como



$$P_X = \underbrace{\sigma_X^2}_{\text{potência AC}} + \underbrace{\mu_X^2}_{\text{potência DC}}.$$



Demonstração: *(fórmula no domínio do tempo)*

Tem-se que

$$\begin{aligned}P_X &= E[X^2(t)] \\&= \text{var}[X(t)] + \mu_X^2 \\&= \text{cov}[X(t), X(t)] + \mu_X^2 \\&= C_X(0) + \mu_X^2.\end{aligned}$$



Demonstração: *(fórmula no domínio da frequência)*

Do teorema de Wiener–Khinchin e da definição da transformada inversa,

$$C_X(\tau) + \mu_X^2 = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df.$$

Substituindo $\tau = 0$, deduz-se que

$$C_X(0) + \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df.$$

O resultado segue da fórmula no domínio do tempo. □



Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a \cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que a , b e f_0 são constantes e $\Theta \sim \text{Uniform}(-\pi, \pi)$.



Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a \cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que a , b e f_0 são constantes e $\Theta \sim \text{Uniform}(-\pi, \pi)$.

Já foi visto:

■ **Média:** $\mu_X = b$

■ **Função autocovariância:** $C_X(\tau) = \frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0 \tau)$



Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$S_X(f)$$



Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$S_X(f) = \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\}$$



Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0\tau) + b^2\right\} \end{aligned}$$



Assim, a **densidade espectral de potência** é

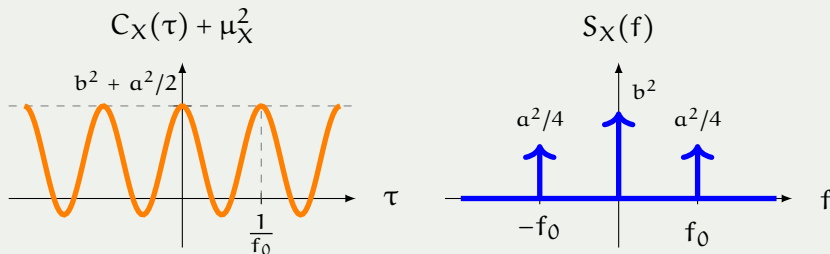
$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0\tau) + b^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}a^2\delta(f + f_0) + \frac{1}{4}a^2\delta(f - f_0) + b^2\delta(f). \end{aligned}$$



Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Assim, a **densidade espectral de potência** é

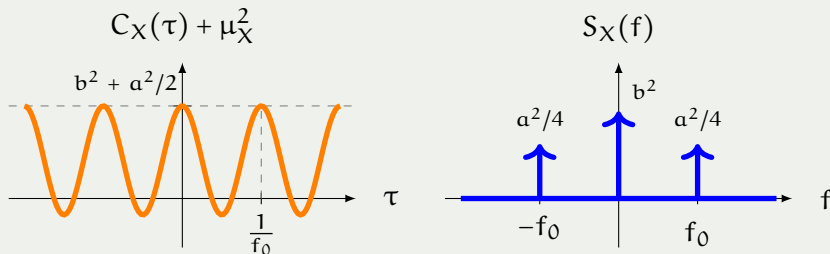
$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\{C_X(\tau) + \mu_X^2\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0 \tau) + b^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}a^2\delta(f + f_0) + \frac{1}{4}a^2\delta(f - f_0) + b^2\delta(f). \end{aligned}$$



Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\{C_X(\tau) + \mu_X^2\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0\tau) + b^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}a^2\delta(f + f_0) + \frac{1}{4}a^2\delta(f - f_0) + b^2\delta(f). \end{aligned}$$



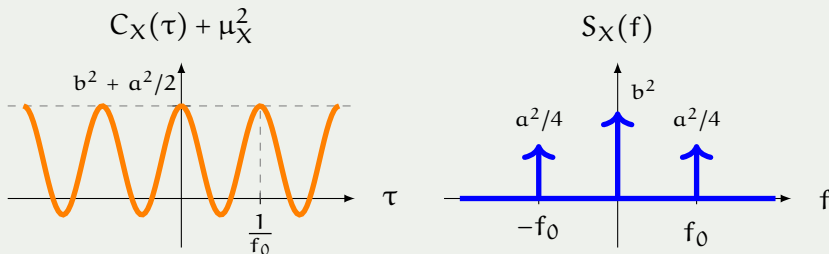
E a **potência média** é



Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\{C_X(\tau) + \mu_X^2\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0 \tau) + b^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}a^2\delta(f + f_0) + \frac{1}{4}a^2\delta(f - f_0) + b^2\delta(f). \end{aligned}$$



E a **potência média** é $P_X = \frac{1}{2}a^2 + b^2$.



Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.



Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

- O nome se dá em (uma vaga) analogia com a *luz branca*, que é composta de múltiplas as cores (frequências no espectro).



Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

- O nome se dá em (uma vaga) analogia com a *luz branca*, que é composta de múltiplas as cores (frequências no espectro).
- O ruído branco é apenas um modelo matemático que não existe na natureza.



Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

- O nome se dá em (uma vaga) analogia com a *luz branca*, que é composta de múltiplas as cores (frequências no espectro).
- O ruído branco é apenas um modelo matemático que não existe na natureza.
- É empregado quando o ruído é suficientemente plano na banda de interesse.



Exemplo: Ruído branco

Exemplo

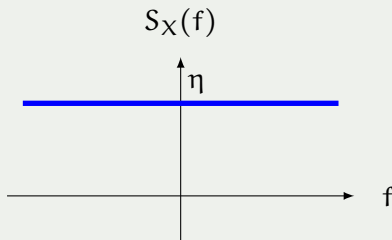
Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η .



Exemplo: Ruído branco

Exemplo

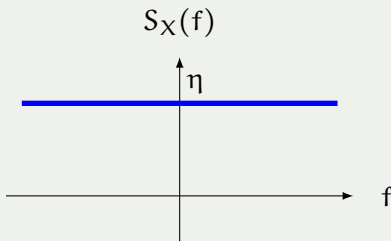
Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η .



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η .

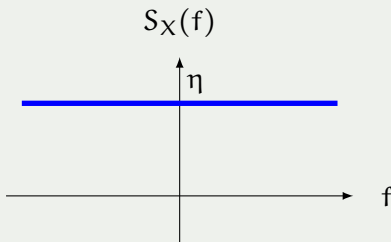
A **função autocovariância** é $C_X(\tau) =$



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η .

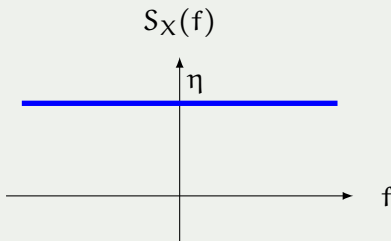
A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} =$



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η .

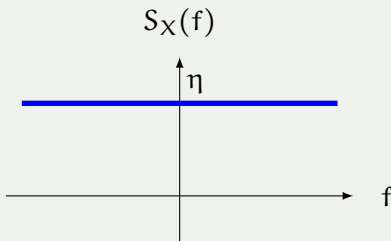
A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} =$



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η .

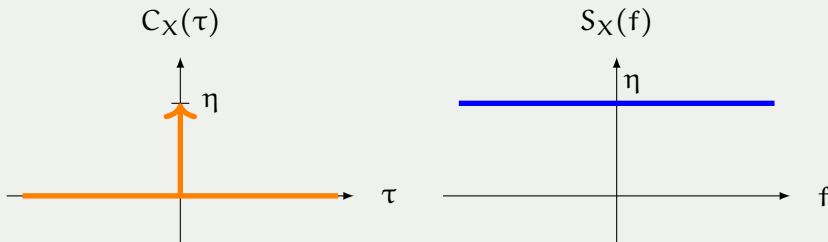
A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η .

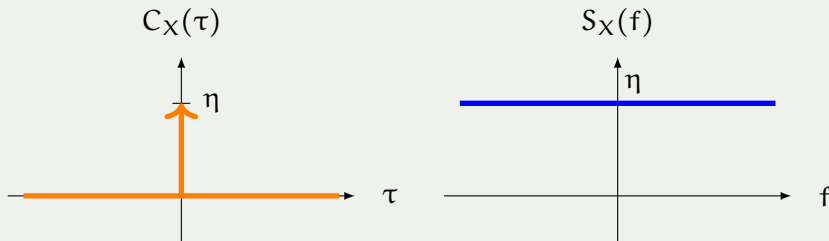
A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η .

A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.



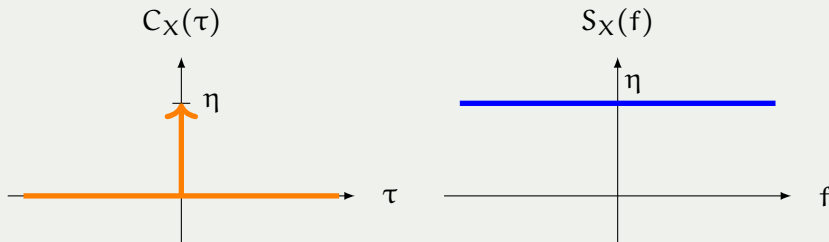
A **potência média** do ruído branco é



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η .

A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.



A **potência média** do ruído branco é $P_X = \infty$.



Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

Exemplo

Seja $X(t)$ um processo ESA de média 0 e densidade espectral de potência

$$S_X(f) = \begin{cases} \eta, & |f| \leq f_0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

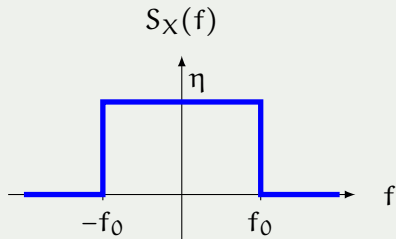


Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

Exemplo

Seja $X(t)$ um processo ESA de média 0 e densidade espectral de potência

$$S_X(f) = \begin{cases} \eta, & |f| \leq f_0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$S_X(f) =$$

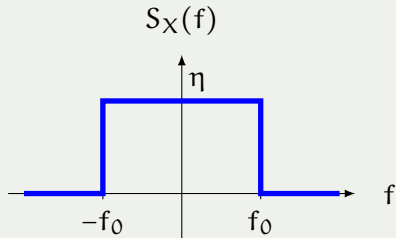


Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

Exemplo

Seja $X(t)$ um processo ESA de média 0 e densidade espectral de potência

$$S_X(f) = \begin{cases} \eta, & |f| \leq f_0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$S_X(f) = \eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)$$



A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau)$$



A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\}$$



A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\}$$



A **função autocovariância** é

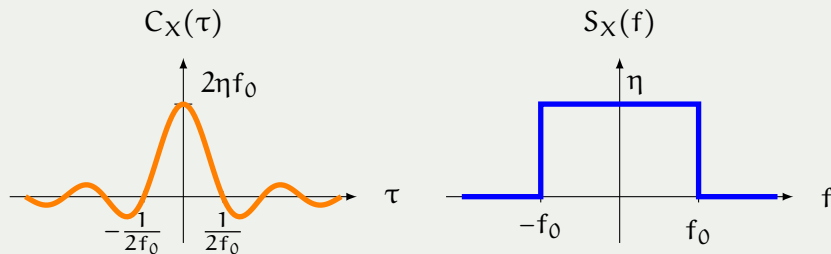
$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0 \operatorname{sinc}(2f_0\tau).$$



Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

A **função autocovariância** é

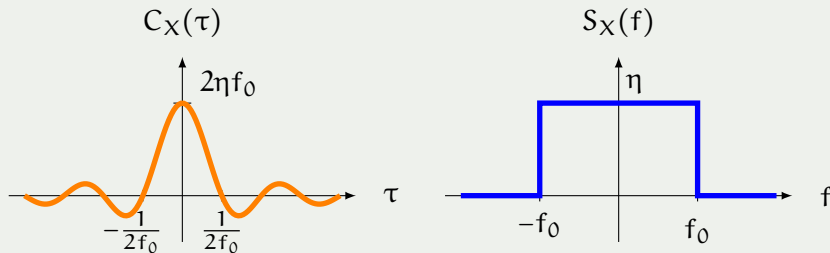
$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0 \operatorname{sinc}(2f_0\tau).$$



Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0 \operatorname{sinc}(2f_0\tau).$$



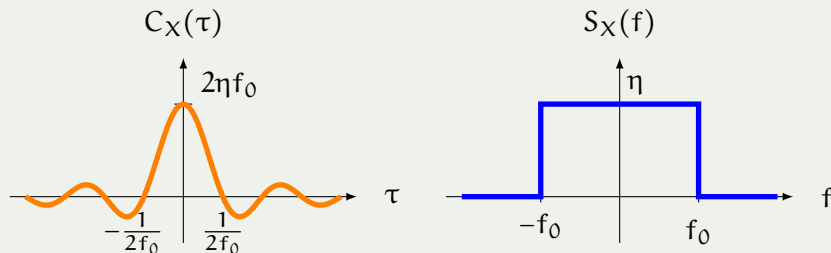
A **potência média** é



Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0 \operatorname{sinc}(2f_0\tau).$$



A **potência média** é $P_X = 2\eta f_0$.



Sistemas LIT vs processos ESA

Definição

Um sistema $\mathcal{H}$ é dito ser **linear e invariante no tempo** (LIT) se as seguintes propriedades são válidas:

1 Linearidade:

$$\begin{matrix} x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} y_1(t) \\ x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} y_2(t) \end{matrix} \implies ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} ay_1(t) + by_2(t)$$

2 Invariância no tempo:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} y(t) \implies x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{H}} y(t - t_0)$$



Teorema

Se um sistema LIT tem em sua entrada um sinal $x(t)$, então sua saída será dada por

$$y(t) = h(t) * x(t),$$

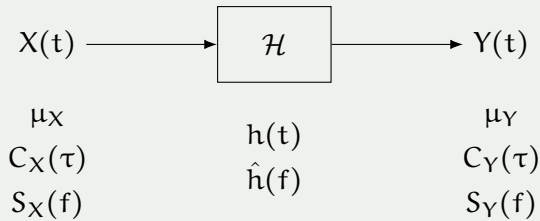
em que $h(t)$ é a **resposta ao impulso** do sistema. Equivalentemente, no domínio da frequência:

$$\hat{y}(f) = \hat{h}(f) \hat{x}(f),$$

em que $\hat{h}(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ é a **resposta em frequência** do sistema.



Considere a seguinte situação, em que um sistema linear e invariante no tempo $\mathcal{H}$ tem em sua entrada um processo estocástico $X(t)$ estacionário no sentido amplo.



Teorema

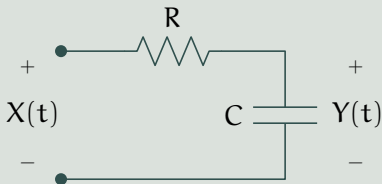
O processo estocástico $Y(t)$ na saída do sistema também é ESA, com

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \hat{h}(0) \mu_X, \\ S_Y(f) &= |\hat{h}(f)|^2 S_X(f).\end{aligned}$$



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η . Determine a média, a densidade espectral de potência, a função autocovariância e a potência média do sinal $Y(t)$ do circuito abaixo.



Solução. Parâmetros do processo de entrada:

$$\mu_X = 0, \quad S_X(f) = \eta, \quad C_X(\tau) = \eta\delta(\tau), \quad P_X = \infty.$$



Solução. Parâmetros do processo de entrada:

$$\mu_X = 0, \quad S_X(f) = \eta, \quad C_X(\tau) = \eta\delta(\tau), \quad P_X = \infty.$$

Resposta em frequência do sistema:

$$\hat{h}(f) = \frac{\hat{y}(f)}{\hat{x}(f)} = \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{\frac{1}{j2\pi fC} + R} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}.$$



Solução. Parâmetros do processo de entrada:

$$\mu_X = 0, \quad S_X(f) = \eta, \quad C_X(\tau) = \eta\delta(\tau), \quad P_X = \infty.$$

Resposta em frequência do sistema:

$$\hat{h}(f) = \frac{\hat{y}(f)}{\hat{x}(f)} = \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{\frac{1}{j2\pi fC} + R} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \hat{h}(0) &= 1, \\ |\hat{h}(f)|^2 &= \frac{1}{1 + (2\pi RCf)^2}. \end{aligned}$$



Parâmetros do processo de saída:

$$\mu_Y = \hat{h}(0) \mu_X = 0,$$

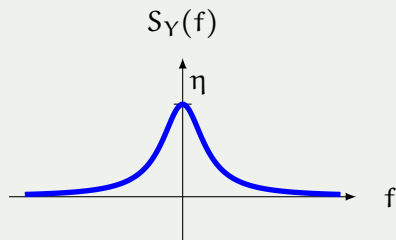
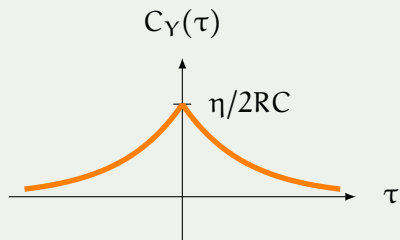
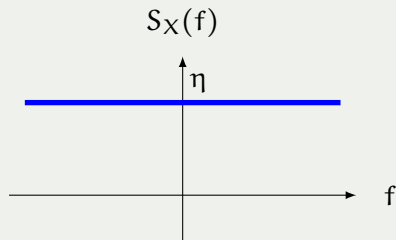
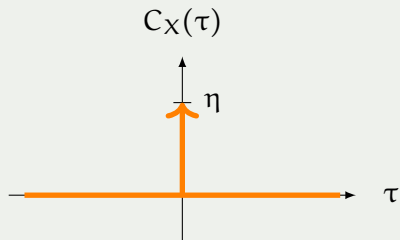
$$S_Y(f) = |\hat{h}(f)|^2 S_X(f) = \frac{\eta}{1 + (2\pi RCf)^2},$$

$$C_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{S_Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\eta}{1 + (2\pi f RC)^2} \right\} = \frac{\eta}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}},$$

$$P_Y = C_Y(0) + \mu_Y^2 = \frac{\eta}{2RC}.$$



Exemplo: Circuito RC



Exemplo

Seja $X[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ uma sequência aleatória. Defina

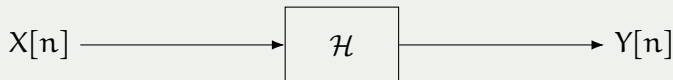
$$Y[n] = X[n] + X[n - 1].$$

Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:



$$\begin{aligned}\mu_X &= \\ C_X[\ell] &= \\ S_X(\phi) &= \end{aligned}$$

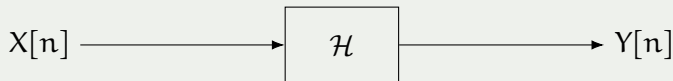
$$\begin{aligned}h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:



$$\begin{aligned}\mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \\ S_X(\phi) &= \end{aligned}$$

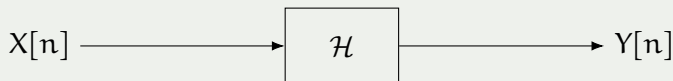
$$\begin{aligned}h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:



$$\begin{aligned}\mu_X &= 0 \\ C_X[l] &= \delta[l] \\ S_X(\phi) &= \end{aligned}$$

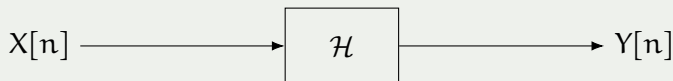
$$\begin{aligned}h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \\ C_Y[l] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:



$$\begin{aligned}\mu_X &= 0 \\ C_X[l] &= \delta[l] \\ S_X(\phi) &= 1\end{aligned}$$

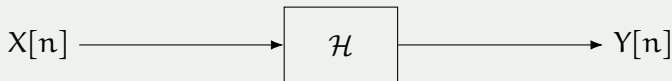
$$\begin{aligned}h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \\ C_Y[l] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:



$$\begin{aligned}\mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= 1\end{aligned}$$

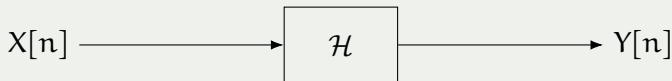
$$\begin{aligned}h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:



$$\begin{aligned}\mu_X &= 0 \\ C_X[l] &= \delta[l] \\ S_X(\phi) &= 1\end{aligned}$$

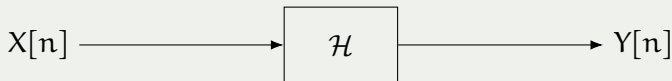
$$\begin{aligned}h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \\ \hat{h}(\phi) &= 1 + e^{-j2\pi\phi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \\ C_Y[l] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:



$$\begin{aligned}\mu_X &= 0 \\ C_X[l] &= \delta[l] \\ S_X(\phi) &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \\ \hat{h}(\phi) &= 1 + e^{-j2\pi\phi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_Y &= ? \\ C_Y[l] &= ? \\ S_Y(\phi) &= ?\end{aligned}$$



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Tem-se:

$$\hat{h}(0) = 1 + e^{-j2\pi \cdot 0} = 2.$$



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Tem-se:

$$\hat{h}(0) = 1 + e^{-j2\pi \cdot 0} = 2.$$

$$|\hat{h}(\phi)|^2 = |1 + e^{-j2\pi\phi}|^2$$



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Tem-se:

$$\hat{h}(0) = 1 + e^{-j2\pi \cdot 0} = 2.$$

$$\begin{aligned} |\hat{h}(\phi)|^2 &= |1 + e^{-j2\pi\phi}|^2 \\ &= \left| \underbrace{1 + \cos(2\pi\phi)}_{\text{Re}} - j \underbrace{\sin(2\pi\phi)}_{\text{Im}} \right|^2 \end{aligned}$$



Tem-se:

$$\hat{h}(0) = 1 + e^{-j2\pi \cdot 0} = 2.$$

$$\begin{aligned} |\hat{h}(\phi)|^2 &= |1 + e^{-j2\pi\phi}|^2 \\ &= \left| \underbrace{1 + \cos(2\pi\phi)}_{\text{Re}} - j \underbrace{\sin(2\pi\phi)}_{\text{Im}} \right|^2 \\ &= [1 + \cos(2\pi\phi)]^2 + \sin^2(2\pi\phi) \\ &= 1 + 2\cos(2\pi\phi) + \underbrace{\cos^2(2\pi\phi) + \sin^2(2\pi\phi)}_1 \end{aligned}$$



Tem-se:

$$\hat{h}(0) = 1 + e^{-j2\pi \cdot 0} = 2.$$

$$\begin{aligned} |\hat{h}(\phi)|^2 &= |1 + e^{-j2\pi\phi}|^2 \\ &= \left| \underbrace{1 + \cos(2\pi\phi)}_{\text{Re}} - j \underbrace{\sin(2\pi\phi)}_{\text{Im}} \right|^2 \\ &= [1 + \cos(2\pi\phi)]^2 + \sin^2(2\pi\phi) \\ &= 1 + 2\cos(2\pi\phi) + \underbrace{\cos^2(2\pi\phi) + \sin^2(2\pi\phi)}_1 \\ &= 2 + 2\cos(2\pi\phi). \end{aligned}$$



Portanto, a **média** de $Y[n]$ é

$$\mu_Y = \hat{h}(0) \underbrace{\mu_X}_0 = 0,$$



Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Portanto, a **média** de $Y[n]$ é

$$\mu_Y = \hat{h}(0) \underbrace{\mu_X}_0 = 0,$$

a **densidade espectral de potência** de $Y[n]$ é

$$S_Y(\phi) = |\hat{h}(\phi)|^2 \underbrace{S_X(\phi)}_1 = 2 + 2 \cos(2\pi\phi),$$



Portanto, a **média** de $Y[n]$ é

$$\mu_Y = \hat{h}(0) \underbrace{\mu_X}_0 = 0,$$

a **densidade espectral de potência** de $Y[n]$ é

$$S_Y(\phi) = |\hat{h}(\phi)|^2 \underbrace{S_X(\phi)}_1 = 2 + 2 \cos(2\pi\phi),$$

e a **função autocovariância** de $Y[n]$ é

$$\begin{aligned} C_Y[\ell] &= \mathcal{F}^{-1}\{S_Y(\phi)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{2\} + \mathcal{F}^{-1}\{2 \cos(2\pi\phi)\} \\ &= 2\delta[\ell] + \delta[\ell - 1] + \delta[\ell + 1]. \end{aligned}$$



Referências



JOSÉ PAULO DE ALMEIDA ALBUQUERQUE, JOSÉ MAURO PEDRO FORTES, AND WEILER ALVES FINAMORE.

PROBABILIDADE, VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.

Editora Interciência, 2008.



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.

PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.

Wiley, 3rd edition, 2014.

