Processos Estocásticos
Engenharia de Telecomunicações

Professor: Roberto Wanderley da Nóbrega Semestre: 2026.1

Lista de exercícios 1

1. Considere uma variável aleatória X definida através do seguinte experimento probabilístico. Um dado honesto é lançado.

- Se o resultado for ⚀ ou ⚁, então $X \sim \text{Uniform}([1, 4])$.
- Se o resultado for ⚂, então $X \sim \text{UniformDiscrete}(\{1, 2, 3\})$.
- Se o resultado for ⚃ ou ⚄, então $X \sim \text{Uniform}([-1, 2])$.
- Se o resultado for ⚅, então $X = 3$.

(a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X.

(b) Determine e esboce a função de distribuição cumulativa de X.

(c) Determine a média de X.

(d) Determine $\Pr[X \geq 2]$.

2. Um sinal de trânsito permanece, alternadamente, 40 segundos aberto e 20 segundos fechado. Seja X a variável aleatória que caracteriza o tempo de espera de um motorista que passe por este sinal, em segundos.

(a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X.

(b) Determine e esboce a função de distribuição cumulativa de X.

(c) Determine o tempo de espera médio.

3. Considere uma variável aleatória Laplaciana X com função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Determine a função densidade de probabilidade e a variância de $Y = g(X)$, onde

$$g(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x < -2; \\ x, & \text{se} -2 \leq x \leq 2; \\ +2, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

4. Sejam $B_1, B_2, B_3 \sim \text{Bern}(3/4)$ variáveis aleatórias sorteadas independentemente. Sejam

$$X = B_1 + B_2 + B_3, \quad \text{e} \quad Y = B_1 B_2 B_3.$$

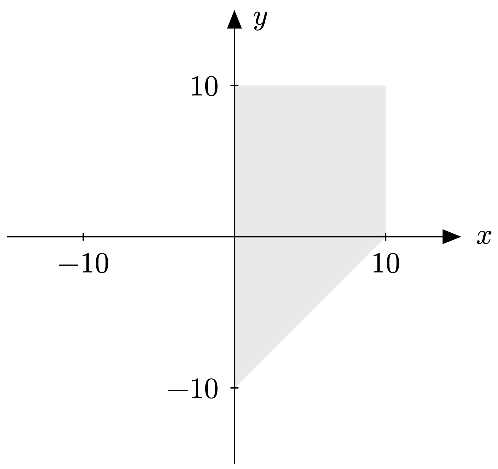
(a) Determine a função massa de probabilidade conjunta de X e Y .

(b) Determine e esboce as funções massa de probabilidade marginais de X e Y.

(c) Determine e esboce as funções massa de probabilidade condicionais de X dado que $Y = y$, para $y = 0$ e para $y = 1$.

(d) Determine a covariância entre X e Y.

5. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com função densidade de probabilidade conjunta constante (igual a k) e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo.



(a) Determine o valor da constante k.

(b) Determine $\Pr[X \geq Y]$.

(c) Determine e esboce a função densidade de probabilidade marginal de Y.

(d) Determine e esboce a função de distribuição cumulativa marginal de Y.

(e) Determine e esboce a função densidade de probabilidade condicional de Y dado $X = 5$.

(f) Determine a covariância entre X e Y.

6. Uma régua de comprimento unitário é quebrada em um ponto aleatório. O pedaço da esquerda é novamente quebrado. Seja X a variável aleatória que define, a partir da extremidade esquerda da régua, o ponto em que a régua é quebrada pela primeira vez e Y a variável aleatória que define o segundo ponto de quebra.

(a) Determine a função densidade de probabilidade marginal de X. Esboce.

(b) Determine a função densidade de probabilidade condicional de Y dado $X = x$. Esboce para $x = 1/4$ e $x = 3/4$.

(c) Determine a função densidade de probabilidade conjunta de X e Y. Esboce a região do plano em que a densidade conjunta é não-nula.

(d) Determine a função densidade de probabilidade marginal de Y. Esboce.

(e) Determine a função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y$. Esboce para $y = 1/4$ e $y = 3/4$.

(f) Determine as médias de X e de Y.

(g) Determine as variâncias de X e de Y.

(h) Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

7. Um terminal de dados sem fio tem três mensagens esperando para transmissão. Depois de enviar uma mensagem, o terminal espera uma confirmação do receptor. Ao receber a confirmação, o terminal transmite a próxima mensagem. Se a confirmação não chegar, ele envia a mensagem novamente. A probabilidade de transmissão bem-sucedida de uma mensagem é p, independentemente das outras transmissões. Seja $\vec{N} = [N_1 \;\; N_2 \;\; N_3]^\mathsf{T}$ o vetor aleatório tridimensional no qual N_i é o número total de transmissões quando a mensagem i é recebida com sucesso (N_3 é o número total de transmissões usadas para enviar todas as três mensagens).

(a) Determine a função massa de probabilidade do vetor aleatório $\vec{N}$.

(b) Determine as funções massa de probabilidade marginais das variáveis aleatórias N_1, N_2 e N_3.

8. Sejam $X_1, X_2, X_3 \sim \text{Uniform}([-1, 2])$ variáveis aleatórias **contínuas** sorteadas independentemente.

(a) Sejam

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 \\
Y_2 &= X_1 X_2 \\
Y_3 &= X_1 X_2 X_3
\end{aligned}
$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\vec{Y} = [Y_1 \;\; Y_2 \;\; Y_3]^\mathsf{T}$.

(b) Sejam

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= Y_1 \\
Z_2 &= Y_1 + Y_2 \\
Z_3 &= Y_1 + Y_2 + Y_3
\end{aligned}
$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\vec{Z} = [Z_1 \;\; Z_2 \;\; Z_3]^\mathsf{T}$. **Utilize a formulação matricial.**

Respostas

1. (a) $f_X(x) = \frac{2}{18}[-1 \leq x \leq 1] + \frac{4}{18}[1 \leq x \leq 2] + +\frac{2}{18}[2 \leq x \leq 4] + \frac{1}{18}\delta(x-1) + \frac{1}{18}\delta(x-2) + \frac{4}{18}\delta(x-3)$.

(b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{2}{18}(x+1), & -1 \leq x < 1; \\ \frac{5}{18} + \frac{4}{18}(x-1), & 1 \leq x < 2; \\ \frac{10}{18} + \frac{2}{18}(x-2), & 2 \leq x < 3; \\ \frac{16}{18} + \frac{2}{18}(x-3), & 3 \leq x < 4; \\ 1, & 4 \leq x. \end{cases}$

(c) $\mu_X = 11/6$.

(d) $\Pr[X \geq 2] = 1/2$.

2. (a) $f_X(x) = \frac{2}{3}\delta(x) + \frac{1}{60}[0 \leq x \leq 20]$.

(b) (Em breve.)

(c) (Em breve.)

3. $f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}[-2 \leq y \leq 2] + \frac{1}{2}e^{-2}\delta(y+2) + \frac{1}{2}e^{-2}\delta(y-2)$.
$\mathrm{var}[Y] = 2 - 6e^{-2}$.

4. (Em breve.)

5. (a) $k = 1/150$.

(b) $\Pr[X \geq Y] = 2/3$.

(c) $f_Y(y) = \begin{cases} (y+10)/150, & -10 \leq y \leq 0; \\ 1/15, & 0 \leq y \leq 10; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(d) (Em breve.)

(e) $f_Y(y \mid X = 5) = \frac{1}{15}[-5 \leq y \leq 10]$.

(f) $\mathrm{cov}[X, Y] = 325/81$.

6. (Em breve.)

7. (a) $p_{\vec{N}}(n_1, n_2, n_3) = p^3(1-p)^{n_3-3}\,[1 \leq n_1 < n_2 < n_3]$.

(b) $p_{N_1}(n) = p(1-p)^{n-1}\,[n \geq 1]$.
$p_{N_2}(n) = (n-1)\,p^2(1-p)^{n-2}\,[n \geq 2]$.
$p_{N_3}(n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,p^3(1-p)^{n-3}\,[n \geq 3]$.

(c) (Em breve.)

8.

(a) $\vec{\mu}_{\vec{Y}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{bmatrix}$ e $C_{\vec{Y}} = \begin{bmatrix} 3/4 & 3/8 & 3/16 \\ 3/8 & 15/16 & 15/32 \\ 3/16 & 15/32 & 63/64 \end{bmatrix}$.

(b) $\vec{\mu}_{\vec{Z}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/4 \\ 7/8 \end{bmatrix}$ e $C_{\vec{Z}} = \begin{bmatrix} 3/4 & 9/8 & 21/16 \\ 9/8 & 39/16 & 99/32 \\ 21/16 & 99/32 & 303/64 \end{bmatrix}$.