



**Processos Estocásticos**  
Engenharia de Telecomunicações

Professor: Roberto Wanderley da Nóbrega

Semestre: 2026.1

## Lista de exercícios 2

1. Seja  $X(t) = \text{rect}(t - A)$ , onde  $A \sim \text{Uniform}(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right])$ .
- (a) Determine e esboce a função massa de probabilidade de primeira ordem de  $X(t)$  para instantes  $t = 0,3$  e  $t = 1,7$ . Generalize o resultado para um instante  $t$  qualquer.
  - (b) Determine e esboce a função média de  $X(t)$ .

2. Sejam  $A, B, C \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(\frac{1}{4})$  Considere o processo estocástico  $X(t)$  definido por

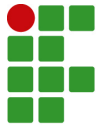
$$X(t) = A \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right) + B \text{rect}\left(\frac{t-6}{4}\right) + C \text{rect}\left(\frac{t-4}{8}\right).$$

- (a) Esboce todas as possíveis funções-amostra de  $X(t)$ , indicando suas respectivas probabilidades de ocorrência.
- (b) Determine e esboce a função massa de probabilidade de primeira ordem de  $X(t)$ . (Deve haver um esboço para cada intervalo de tempo relevante.)
- (c) Determine e esboce a função média de  $X(t)$ .
- (d) Determine a função massa de probabilidade de segunda ordem de  $X(t)$ , considerando apenas valores  $t_1$  e  $t_2$  satisfazendo de  $0 < t_1 < 4$  e  $-\infty < t_2 < \infty$ . (Não precisa esboçar.)

3. Determine a função média e a função autocovariância do processo estocástico

$$X(t) = A \cos(2\pi Ft + \Theta),$$

onde  $A \sim \text{Uniform}([0, a_0])$ ,  $F \sim \text{Uniform}([0, f_0])$  e  $\Theta \sim \text{Uniform}([0, 2\pi])$  são variáveis aleatórias independentes par a par.



4. Considere uma sequência de bits independentes e equiprováveis que gera um processo estocástico  $X[n]$  da seguinte maneira. Se o bit é 0, então os dois próximos valores de  $X[n]$  são +1 e -1; se o bit é 1, então os dois próximos valores de  $X[n]$  são -1 e +1. Por exemplo, a sequência de bits 1001... gera a sequência de amostras -1, +1, +1, -1, +1, -1, -1, +1, ... Determine a função média e a função autocovariância de  $X[n]$ .

5. Seja  $X(t)$  um processo estocástico definido por

$$X(t) = A_1 \cos(2\pi t) + A_2 \sin(2\pi t),$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são variáveis aleatórias i.i.d., ambas assumindo os valores -2 e 1 com probabilidades  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$ , respectivamente. Determine a função média e a função autocovariância de  $X(t)$  e conclua que  $X(t)$  é um processo estocástico estacionário no sentido amplo.

6. Seja  $X[n]$  um processo estocástico de parâmetro discreto, em que  $X[n]$ , para todo  $n$ , são variáveis aleatórias gaussianas i.i.d. de média 0 e variância 2. Seja

$$Y[n] = 3X[n] + 4X[n - 1].$$

Determine:

- (a) A função autocovariância de  $X[n]$ . Esboce.
  - (b) A função autocovariância de  $Y[n]$ , sem utilizar análise no domínio da frequência. Esboce.
  - (c) A função autocovariância de  $Y[n]$ , utilizando análise no domínio da frequência.
  - (d) A função densidade de probabilidade de  $Y[3]$ .
  - (e) A covariância entre  $Y[3]$  e  $Y[4]$ .
  - (f)  $\mathbb{P}[Y[3] > 0 \mid Y[1] = 1]$ .
7. Seja  $Y(t)$  o processo estocástico obtido na saída de um sistema LTI com resposta ao impulso

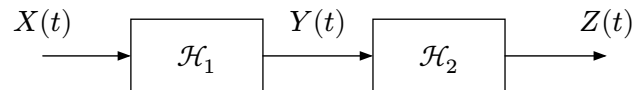
$$h(t) = \begin{cases} e^{-t/5}, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

supondo na entrada ruído branco  $X(t)$  com média nula e densidade espectral de potência  $S_X(f) = 4$ , para todo  $f$ . Determine o coeficiente de Pearson entre  $Y(40)$  e  $Y(42)$ .



8. Considere o diagrama de blocos abaixo, em que

- $X(t)$  é ruído branco de média zero e densidade espectral de potência  $S_X(f) = 2$ .
- $\mathcal{H}_1$  é um sistema LTI com resposta ao impulso dada por  $h_1(t) = 2 \text{sinc}(3t)$ .
- $\mathcal{H}_2$  é um sistema LTI com resposta em frequência dada por  $H_2(f) = 4[-5 \leq f \leq 5]$ .



Determine, para cada um dos processos, a função autocovariância (esboce), a função densidade espectral de potência (esboce) e a potência média.

9. Considere um sistema fechado com exatamente três compartimentos (A, B e C) entre os quais partículas podem migrar a cada “passo de evolução” do sistema conforme a seguir:

- Uma partícula que está em A migra para B com probabilidade de 30% e para C com probabilidade de 10% (permanecendo em A com o restante da probabilidade).
- Uma partícula que está em B migra para A com probabilidade de 20% e para C com probabilidade de 30% (permanecendo em B com o restante da probabilidade).
- Uma partícula que está em C migra para A com probabilidade de 25% e para B com probabilidade de 25% (permanecendo em C com o restante da probabilidade).

Sabendo que o sistema contém um total de 1 milhão de partículas, determine quantas partículas haverá aproximadamente em cada compartimento a longo prazo.

10. Um bêbado caminha em uma avenida com quatro blocos. Quando ele se encontra em algum cruzamento ( $C_1$ ,  $C_2$  ou  $C_3$ ), ele anda para esquerda, para a direita, ou permanece onde está, com igual probabilidade. Se ele chegar em casa (H) ou no bar (B), ele permanecerá lá para sempre.

- Qual a probabilidade do bêbado terminar em casa, supondo que ele tenha iniciado no cruzamento 1?
- Qual o tempo médio até que o bêbado chegue em casa ou no bar, supondo que ele tenha iniciado no cruzamento 2?
- Quantas vezes, em média, o bêbado visita o cruzamento 2 antes de ser chegar em casa ou no bar, supondo que ele tenha iniciado no cruzamento 3?



## Respostas

1. (a)  $X(t) \sim \text{Bernoulli}(t)$ , para  $0 \leq t \leq 1$ ;  $X(t) \sim \text{Bernoulli}(2-t)$ , para  $1 \leq t \leq 2$ ;  $X(t) = 0$ , caso contrário.
- (b)  $\mu_X(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1; \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
2. (a) —.
- (b)  $p_{X(t)}(x) = \begin{cases} (9/16)\delta[x] + (6/16)\delta[x-1] + (1/16)\delta[x-2], & 0 < t < 8; \\ \delta[x], & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- (c)  $\mu_X(t) = (1/2)[0 < t < 8]$ .
- (d)  $(0 < t_1 < 4) \wedge (0 < t_2 < 4): p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- $(0 < t_1 < 4) \wedge (4 < t_2 < 8): p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 27 & 9 & 0 \\ 9 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .
- $(0 < t_1 < 4) \wedge (t_2 < 0 \vee t_2 > 4): p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
3.  $\mu_X(t) = 0$  e  $C_X(t_1, t_2) = (a_0^2/6) \text{sinc}(2f_0(t_2 - t_1))$ .
4. (Em breve.)
5.  $\mu_X = 0$  e  $C_X(\tau) = 2 \cos(2\pi\tau)$ .
6. (a)  $C_X[\ell] = 2\delta[\ell]$ .
- (b)  $C_Y[\ell] = 50\delta[\ell] + 12\delta[\ell + 1] + 12\delta[\ell - 1]$ .
- (c) Idem.
- (d)  $f_{Y[3]}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 50}} \exp\left(-\frac{y^2}{2 \cdot 50}\right)$ .
- (e)  $\text{cov}[Y[3], Y[4]] = 24$ .
- (f)  $\mathbb{P}[Y[3] > 0 \mid Y[1] = 1] = 1/2$ .
7.  $\rho_{X[40], X[42]} = 0.670320$ .
8.  $C_X(\tau) = 2\delta(\tau)$ ,  $S_X(f) = 2$ ,  $P_X = \infty$ .
- $C_Y(\tau) = (8/3) \text{sinc}(3\tau)$ ,  $S_Y(f) = (8/9) \text{rect}(f/3)$ ,  $P_Y = 8/3$ .
- $C_Z(\tau) = (128/3) \text{sinc}(3\tau)$ ,  $S_Z(f) = (128/9) \text{rect}(f/3)$ ,  $P_Z = 128/3$ .
9.  $A \rightarrow 357143$  partículas,  $B \rightarrow 357143$  partículas,  $C \rightarrow 285714$  partículas.
10. (a) 75%.
- (b) 6 passos.
- (c) 1.5 visitas em média.