

Processos Estocásticos

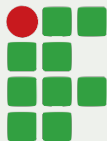
Revisão: Valor esperado

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



**INSTITUTO
FEDERAL**
Santa Catarina

Câmpus
São José

Definição

Definição

O **valor esperado** de uma VA é dado por

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x). \quad (\text{caso discreto})$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \quad (\text{caso contínuo})$$



Definição

O **valor esperado** de uma VA é dado por

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x). \quad (\text{caso discreto})$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \quad (\text{caso contínuo})$$

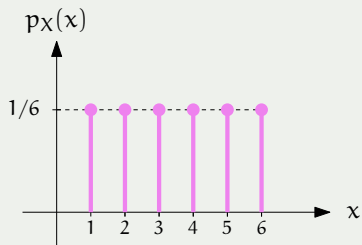
O valor esperado de X também é chamado de **média** de X . Notação:

$$\mu_X = E[X].$$



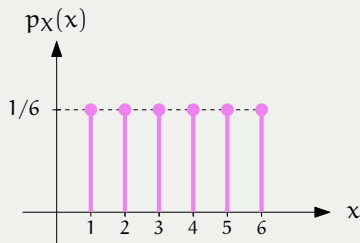
Exemplo: Distribuição uniforme discreta

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(1, 6)$.



Exemplo: Distribuição uniforme discreta

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(1, 6)$.



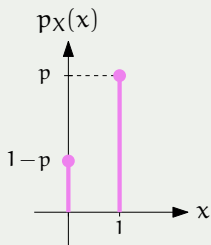
Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x) = (1) \cdot \frac{1}{6} + (2) \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6) \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$



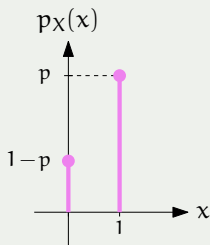
Exemplo: Distribuição de Bernoulli

Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.



Exemplo: Distribuição de Bernoulli

Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.



Seu valor esperado é dado por:

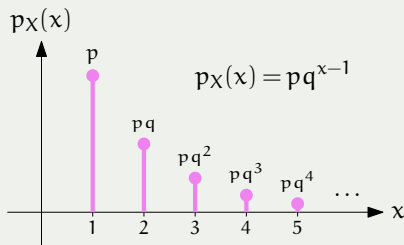
$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x) = (0)(1-p) + (1)p = p.$$



Exemplo: Distribuição geométrica

Seja $X \sim \text{Geometric}(p)$.

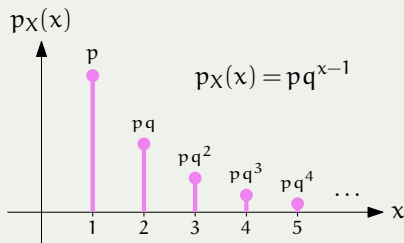
($q = 1 - p$)



Exemplo: Distribuição geométrica

Seja $X \sim \text{Geometric}(p)$.

($q = 1 - p$)



Seu valor esperado é dado por:

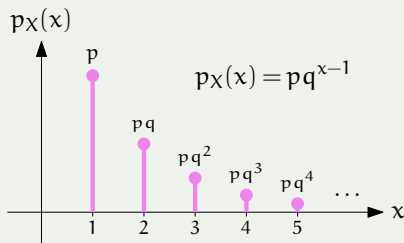
$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1}$$



Exemplo: Distribuição geométrica

Seja $X \sim \text{Geometric}(p)$.

($q = 1 - p$)



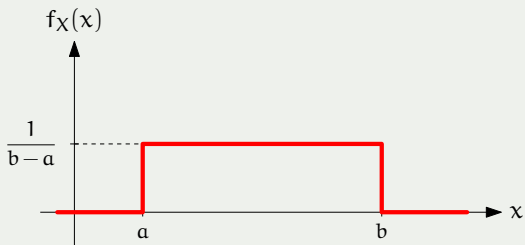
Seu valor esperado é dado por:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x \in S_X} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1} \\ &= p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^x = p \frac{d}{dq} \sum_{x=1}^{\infty} q^x = p \frac{d}{dq} \frac{q}{1-q} = p \frac{1}{(1-q)^2} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$



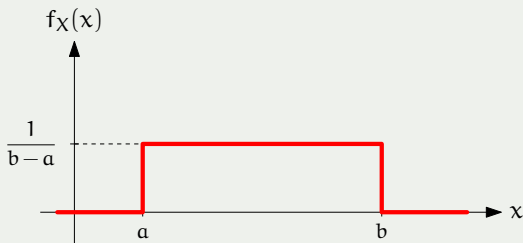
Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



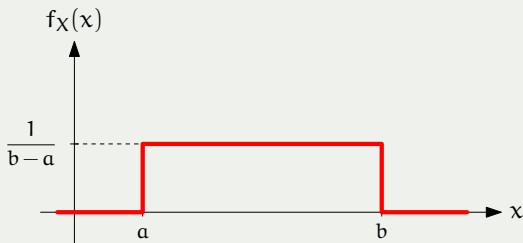
Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx$$



Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



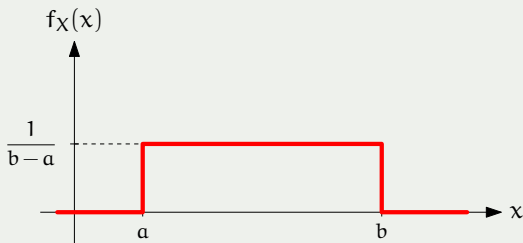
Seu valor esperado é dado por:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \end{aligned}$$



Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



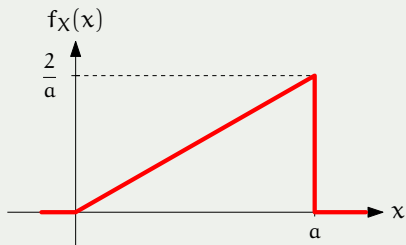
Seu valor esperado é dado por:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$



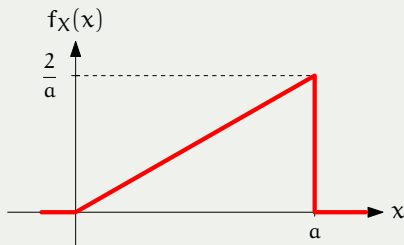
Exemplo: Distribuição triangular contínua

Seja $X \sim \text{Triangular}(\text{left}=0, \text{right}=\alpha, \text{mode}=\alpha)$.



Exemplo: Distribuição triangular contínua

Seja $X \sim \text{Triangular}(\text{left}=0, \text{right}=a, \text{mode}=a)$.



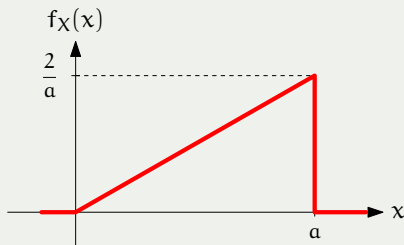
Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^a x \frac{2x}{a^2} dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx$$



Exemplo: Distribuição triangular contínua

Seja $X \sim \text{Triangular}(\text{left}=0, \text{right}=a, \text{mode}=a)$.



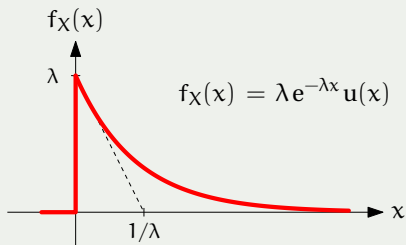
Seu valor esperado é dado por:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^a x \frac{2x}{a^2} dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx \\ &= \frac{2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=a} = \frac{2a}{3}. \end{aligned}$$



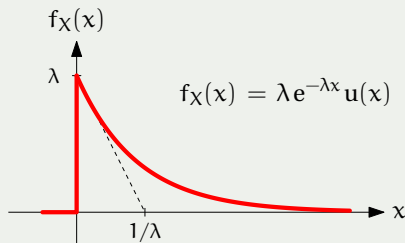
Exemplo: Distribuição exponencial

Seja $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.



Exemplo: Distribuição exponencial

Seja $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.



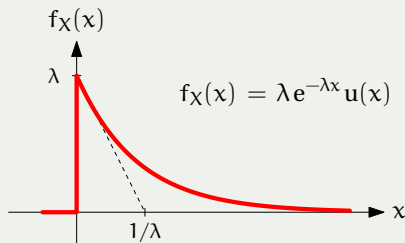
Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$$



Exemplo: Distribuição exponencial

Seja $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.



Seu valor esperado é dado por:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \left[-\frac{e^{-\lambda x} (\lambda x + 1)}{\lambda^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$



1 Valor esperado de uma constante

$$E[c] = c.$$



1 Valor esperado de uma constante

$$E[c] = c.$$

2 Homogeneidade

$$E[cX] = c E[X].$$



1 Valor esperado de uma constante

$$E[c] = c.$$

2 Homogeneidade

$$E[cX] = c E[X].$$

3 Translação

$$E[X + c] = E[X] + c.$$



1 Valor esperado de uma constante

$$E[c] = c.$$

2 Homogeneidade

$$E[cX] = c E[X].$$

3 Translação

$$E[X + c] = E[X] + c.$$

4 Aditividade

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y].$$



1 Valor esperado de uma constante

$$E[c] = c.$$

2 Homogeneidade

$$E[cX] = c E[X].$$

3 Translação

$$E[X + c] = E[X] + c.$$

4 Aditividade

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y].$$



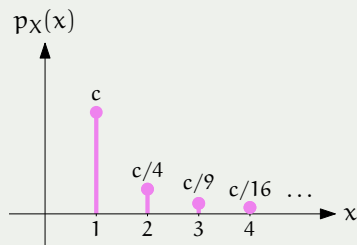
As propriedades 2 e 4 nos dizem que o valor esperado é um **operador linear**.



Nem todas as VAs possuem média

Seja X uma VA discreta com PMF dada por

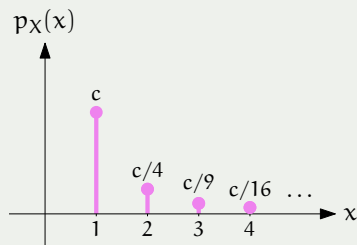
$$p_X(x) = \frac{c}{x^2}, \quad x = 1, 2, \dots, \quad \left[c = 6/\pi^2: \text{problema de Basileia} \right]$$



Nem todas as VAs possuem média

Seja X uma VA discreta com PMF dada por

$$p_X(x) = \frac{c}{x^2}, \quad x = 1, 2, \dots, \quad [c = 6/\pi^2: \text{problema de Basileia}]$$



O valor esperado de X é dado por

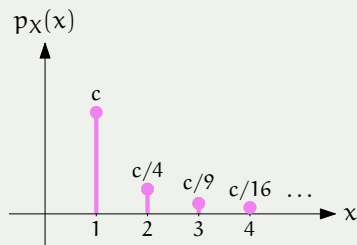
$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{c}{x^2} = c \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} =$$



Nem todas as VAs possuem média

Seja X uma VA discreta com PMF dada por

$$p_X(x) = \frac{c}{x^2}, \quad x = 1, 2, \dots, \quad [c = 6/\pi^2: \text{problema de Basileia}]$$



O valor esperado de X é dado por

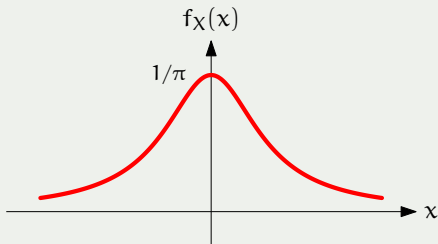
$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{c}{x^2} = c \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = \infty.$$



Nem todas as VAs possuem média

Seja X uma VA contínua com PDF dada por

$$f_X(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2}. \quad (\text{Cauchy})$$



Nesse caso, $E[X]$ é indefinido:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \text{ não existe.}$$

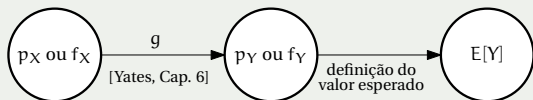


Valor esperado de função de VA

Valor esperado de função de VA: Introdução

Seja $Y = g(X)$.

Em princípio, para calcular $E[Y]$ seria necessário primeiro obter p_Y ou f_Y .

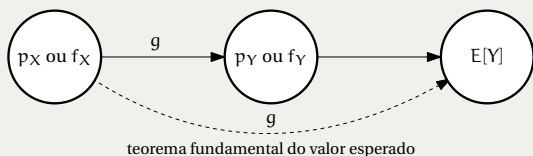


Valor esperado de função de VA: Introdução

Seja $Y = g(X)$.

Em princípio, para calcular $E[Y]$ seria necessário primeiro obter p_Y ou f_Y .

No entanto, o *teorema fundamental do valor esperado* fornece um atalho.

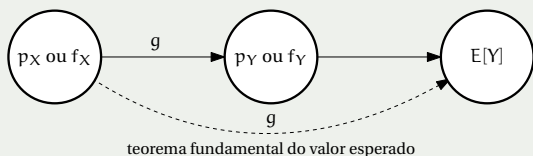


Valor esperado de função de VA: Introdução

Seja $Y = g(X)$.

Em princípio, para calcular $E[Y]$ seria necessário primeiro obter p_Y ou f_Y .

No entanto, o *teorema fundamental do valor esperado* fornece um atalho.



Teorema fundamental do valor esperado

$$E[g(X)] = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x). \quad (\text{caso discreto})$$

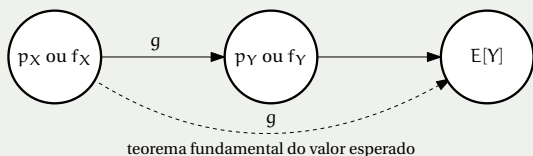


Valor esperado de função de VA: Introdução

Seja $Y = g(X)$.

Em princípio, para calcular $E[Y]$ seria necessário primeiro obter p_Y ou f_Y .

No entanto, o *teorema fundamental do valor esperado* fornece um atalho.



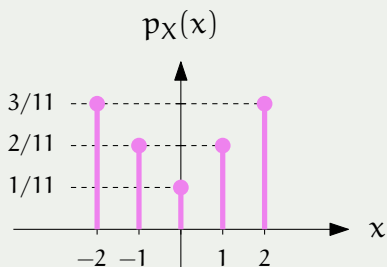
Teorema fundamental do valor esperado

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \quad (\text{caso contínuo})$$



Exemplo: Caso discreto

Seja X uma VA discreta com PMF dada pela figura.



Determine $E[X^2]$.



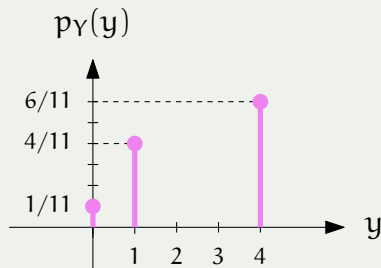
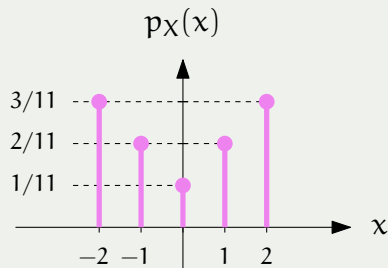
Exemplo: Caso discreto

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $p_X \rightarrow p_Y \rightarrow E[Y]$.



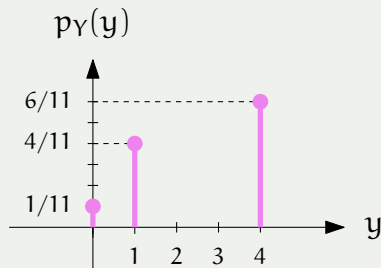
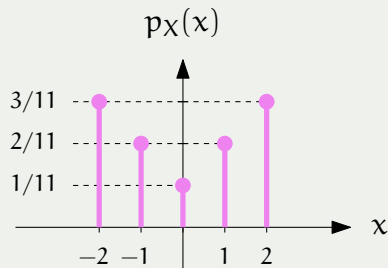
Exemplo: Caso discreto

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $p_X \rightarrow p_Y \rightarrow E[Y]$.



Exemplo: Caso discreto

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $p_X \rightarrow p_Y \rightarrow E[Y]$.

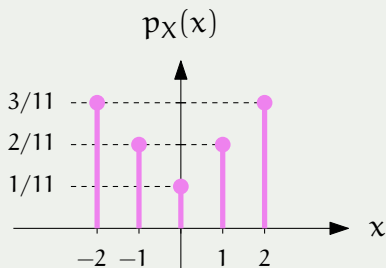


$$E[X^2] = E[Y] = (0) \cdot \frac{1}{11} + (1) \cdot \frac{4}{11} + (4) \cdot \frac{6}{11} = \frac{28}{11}.$$

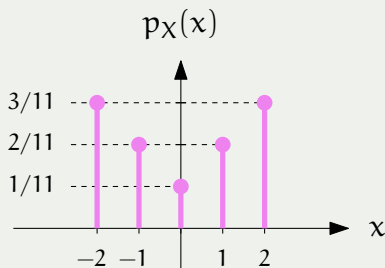


Exemplo: Caso discreto

Solução 2. Usar o teorema fundamental do valor esperado.



Solução 2. Usar o teorema fundamental do valor esperado.

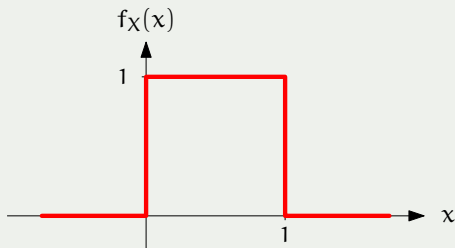


$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{x \in S_X} x^2 p_X(x) \\ &= (-2)^2 \cdot \frac{3}{11} + (-1)^2 \cdot \frac{2}{11} + (0)^2 \cdot \frac{1}{11} + (1)^2 \cdot \frac{2}{11} + (2)^2 \cdot \frac{3}{11} = \frac{28}{11}. \end{aligned}$$



Exemplo: Caso contínuo

Seja X uma VA contínua distribuída uniformemente no intervalo $[0, 1]$.

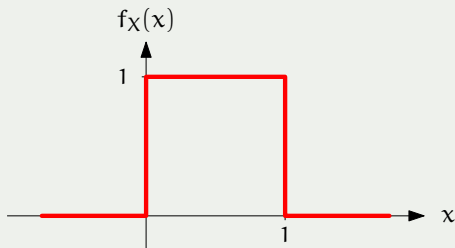


Determine $E[X^2]$.



Exemplo: Caso contínuo

Seja X uma VA contínua distribuída uniformemente no intervalo $[0, 1]$.



Determine $E[X^2]$.



X^2 é um exemplo de VA com *distribuição beta*.



Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \rightarrow F_Y \rightarrow f_Y \rightarrow E[Y]$.



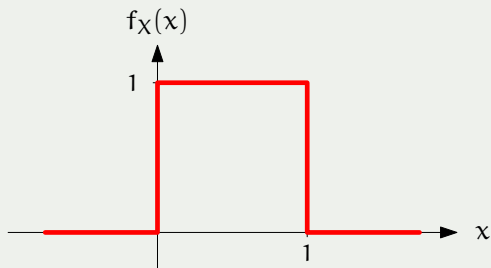
Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \rightarrow F_Y \rightarrow f_Y \rightarrow E[Y]$.



Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \rightarrow F_Y \rightarrow f_Y \rightarrow E[Y]$.



Caso $y < 0$:

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = 0.$$

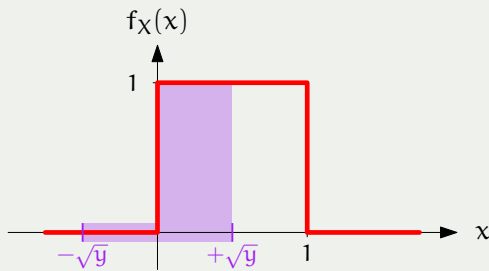
Caso $y > 1$:

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = 1.$$



Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \rightarrow F_Y \rightarrow f_Y \rightarrow E[Y]$.



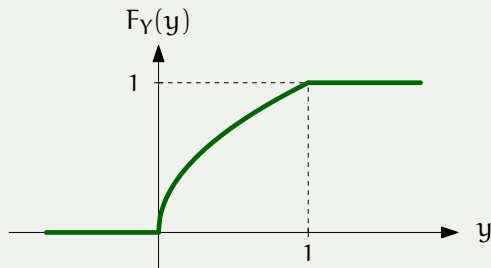
Caso $0 \leq y \leq 1$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr[Y \leq y] = \Pr[X^2 \leq y] \\ &= \Pr[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}] = \int_{-\sqrt{y}}^0 0 \, dx + \int_0^{\sqrt{y}} 1 \, dx = \sqrt{y}. \end{aligned}$$



Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \rightarrow F_Y \rightarrow f_Y \rightarrow E[Y]$.



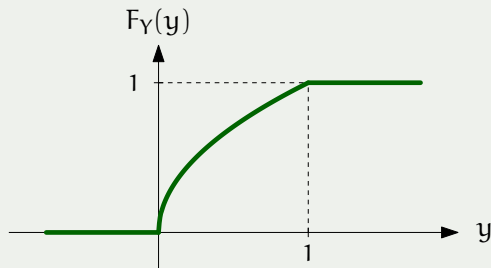
Sumário:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$



Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \rightarrow F_Y \rightarrow f_Y \rightarrow E[Y]$.



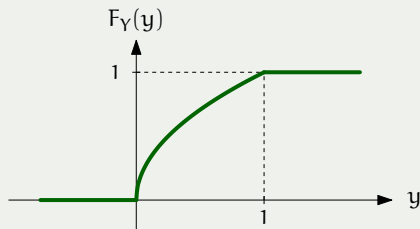
Sumário:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

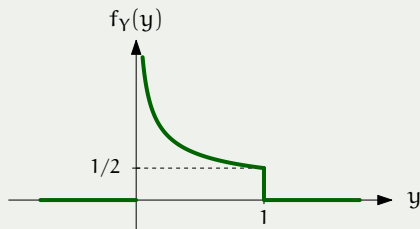


Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \rightarrow F_Y \rightarrow f_Y \rightarrow E[Y]$.



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

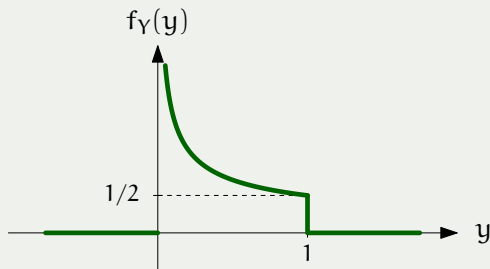


$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \rightarrow F_Y \rightarrow f_Y \rightarrow E[Y]$.

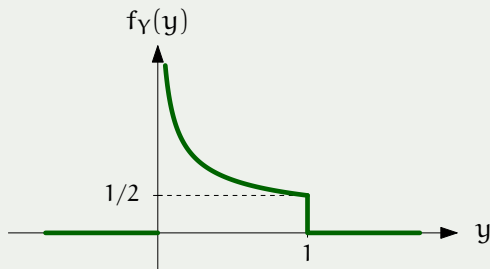


$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \rightarrow F_Y \rightarrow f_Y \rightarrow E[Y]$.



$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] = E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{1/2} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

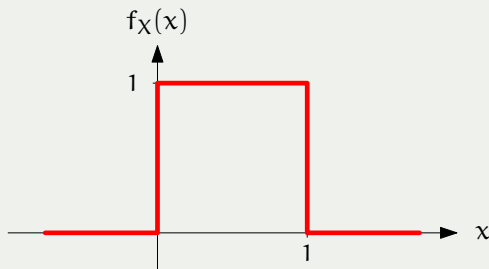


Exemplo: Caso contínuo

Solução 2. Usar o teorema fundamental do valor esperado.



Solução 2. Usar o teorema fundamental do valor esperado.



$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$



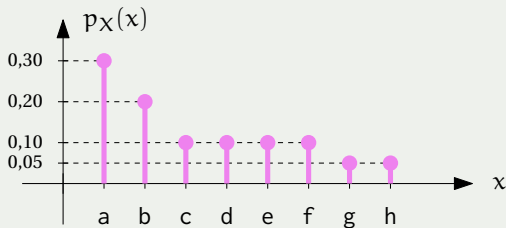
Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Considere a seguinte “fonte de informação”, modelada pela VA X :

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05



X é uma VA “categórica”, e não uma VA real.



Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Considere a seguinte “fonte de informação”, modelada pela VA X :

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05

Um codificador “ingênuo” utilizaria 3 bits para cada letra da fonte.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\text{Enc}(x)$	000	001	010	011	100	101	110	111



Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Considere a seguinte “fonte de informação”, modelada pela VA X :

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05

Um codificador “ingênuo” utilizaria 3 bits para cada letra da fonte.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$Enc(x)$	000	001	010	011	100	101	110	111

Como alternativa, considere o codificador abaixo:

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$Enc(x)$	01	000	111	110	101	100	0011	0010



Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Considere a seguinte “fonte de informação”, modelada pela VA X :

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05

Um codificador “ingênuo” utilizaria 3 bits para cada letra da fonte.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\text{Enc}(x)$	000	001	010	011	100	101	110	111

Como alternativa, considere o codificador abaixo:

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\text{Enc}(x)$	01	000	111	110	101	100	0011	0010

Nesse caso, qual é o comprimento médio da representação binária das letras da fonte?



Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Seja $\ell : S_X \rightarrow \mathbb{N}$ a função que retorna o comprimento da representação binária de cada letra da fonte.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05
$Enc(x)$	01	000	111	110	101	100	0011	0010
$\ell(x)$	2	3	3	3	3	3	4	4



Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Seja $\ell : S_X \rightarrow \mathbb{N}$ a função que retorna o comprimento da representação binária de cada letra da fonte.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05
Enc(x)	01	000	111	110	101	100	0011	0010
$\ell(x)$	2	3	3	3	3	3	4	4

Pelo teorema fundamental do valor esperado:

$$\begin{aligned} E[\ell(X)] &= \sum_{x \in S_X} \ell(x) p_X(x) \\ &= \ell(a)p_X(a) + \ell(b)p_X(b) + \dots + \ell(h)p_X(h) \\ &= 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + \dots + 4 \cdot 0,05 \\ &= 2,8 \text{ bits.} \end{aligned}$$



Variância e desvio padrão

Definição

A **variância** de uma variável aleatória X é dada por

$$\sigma_X^2 = \text{var}[X] = E[(X - \mu_X)^2].$$

O **desvio padrão** de X é dado por

$$\sigma_X = \sqrt{\text{var}[X]}.$$



A variância é uma medida de *dispersão ao redor da média*.



Teorema

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2.$$

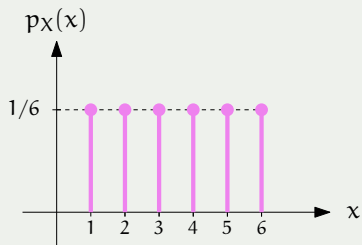
Demonstração:

$$\begin{aligned}\text{var}[X] &= E[(X - \mu_X)^2] \\ &= E[X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2] \\ &= E[X^2] - 2 \underbrace{E[X]}_{\mu_X} \mu_X + \underbrace{E[\mu_X^2]}_{\mu_X^2} \\ &= E[X^2] - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 \\ &= E[X^2] - \mu_X^2. \quad \square\end{aligned}$$



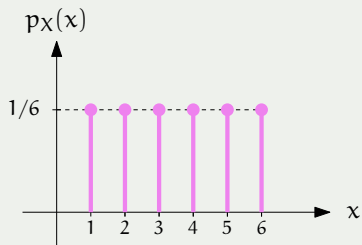
Exemplo: Distribuição uniforme discreta

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(1, 6)$.



Exemplo: Distribuição uniforme discreta

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(1, 6)$.

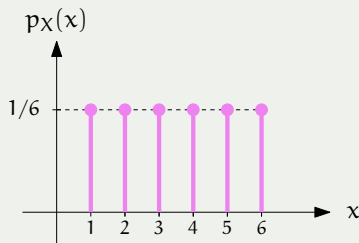


Já foi visto que $E[X] = 3,5 = 7/2$.



Exemplo: Distribuição uniforme discreta

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(1, 6)$.



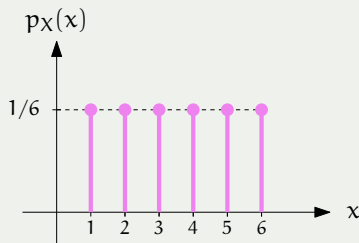
Já foi visto que $E[X] = 3,5 = 7/2$.

$$E[X^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 p_X(x) = (1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$



Exemplo: Distribuição uniforme discreta

Seja $X \sim \text{DiscreteUniform}(1, 6)$.



Já foi visto que $E[X] = 3,5 = 7/2$.

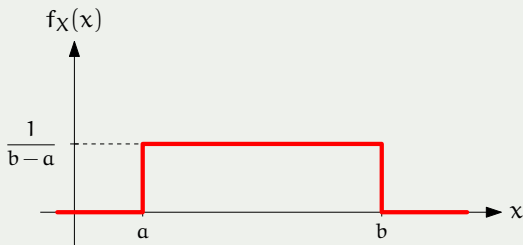
$$E[X^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 p_X(x) = (1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$



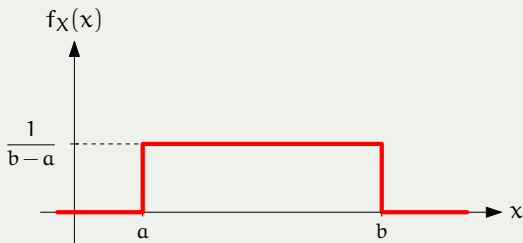
Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



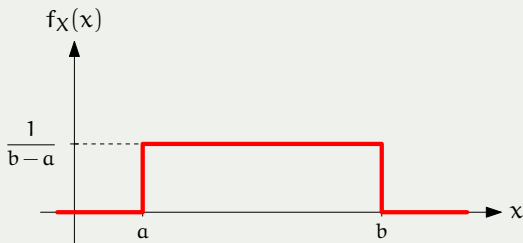
Já foi visto que

$$E[X] = \frac{a + b}{2}.$$



Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



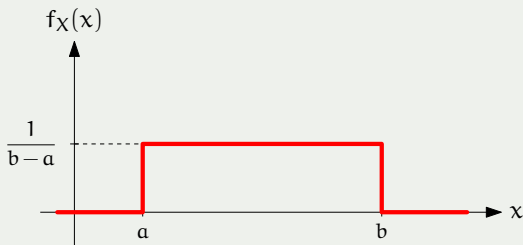
Além disso,

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx$$



Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



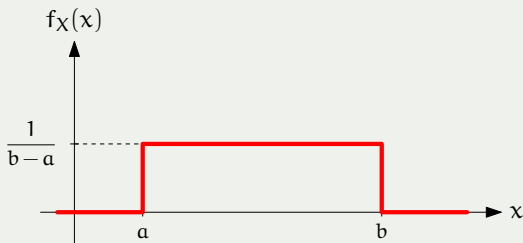
Além disso,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \end{aligned}$$



Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



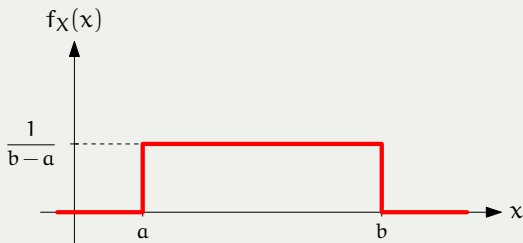
Além disso,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \end{aligned}$$



Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



Portanto,

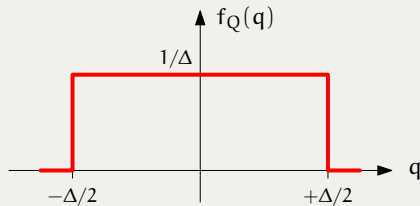
$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$



Exemplo: Ruído de quantização

Uma suposição bastante comum na teoria de quantizadores uniformes é considerar que o ruído de quantização seja uma VA Q com PDF

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} \leq q \leq \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$



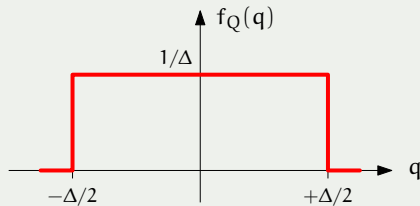
onde Δ é a distância entre os níveis de quantização.



Exemplo: Ruído de quantização

Uma suposição bastante comum na teoria de quantizadores uniformes é considerar que o ruído de quantização seja uma VA Q com PDF

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} \leq q \leq \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$



onde Δ é a distância entre os níveis de quantização.

Portanto, a variância do ruído de quantização é dada por $\sigma_Q^2 = \Delta^2/12$; esse resultado é útil para calcular a *razão sinal-ruído de quantização*.



1 Nunca negativa

$$\text{var}[X] \geq 0.$$



1 Nunca negativa

$$\text{var}[X] \geq 0.$$

2 Variância de uma constante

$$\text{var}[c] = 0.$$



1 Nunca negativa

$$\text{var}[X] \geq 0.$$

2 Variância de uma constante

$$\text{var}[c] = 0.$$

3 Multiplicação por constante

$$\text{var}[cX] = c^2 \text{var}[X].$$



1 Nunca negativa

$$\text{var}[X] \geq 0.$$

2 Variância de uma constante

$$\text{var}[c] = 0.$$

3 Multiplicação por constante

$$\text{var}[cX] = c^2 \text{var}[X].$$

4 Translação

$$\text{var}[X + c] = \text{var}[X].$$



1 Nunca negativa

$$\text{var}[X] \geq 0.$$

2 Variância de uma constante

$$\text{var}[c] = 0.$$

3 Multiplicação por constante

$$\text{var}[cX] = c^2 \text{var}[X].$$

4 Translação

$$\text{var}[X + c] = \text{var}[X].$$

5 Variância da soma

$$\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + \text{????}.$$



Teorema

Seja X uma VA e seja

$$Y = aX + b,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Então,

$$\mu_Y = a\mu_X + b,$$

$$\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2.$$



Exercícios propostos

- 3.3.4.
- 3.5.11.
- 4.4.4.
- 4.4.6.
- 4.4.7.
- 4.5.3.



Esboce sua resposta sempre que possível.



Referências

Referências



STEVEN M. KAY.

INTUITIVE PROBABILITY AND RANDOM PROCESSES USING MATLAB[®].

Springer, 2006.



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.

PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.

Wiley, 3rd edition, 2014.

