Processos Estocásticos

Variáveis aleatórias mistas

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006
Engenharia de Telecomunicações

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Função impulso

Definição

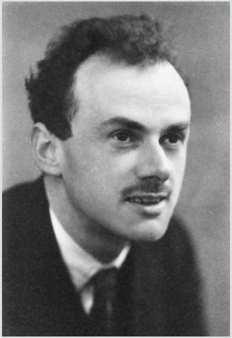
A **função impulso unitário** ou **função delta de Dirac** é definida como

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} d_\epsilon(x),$$

onde

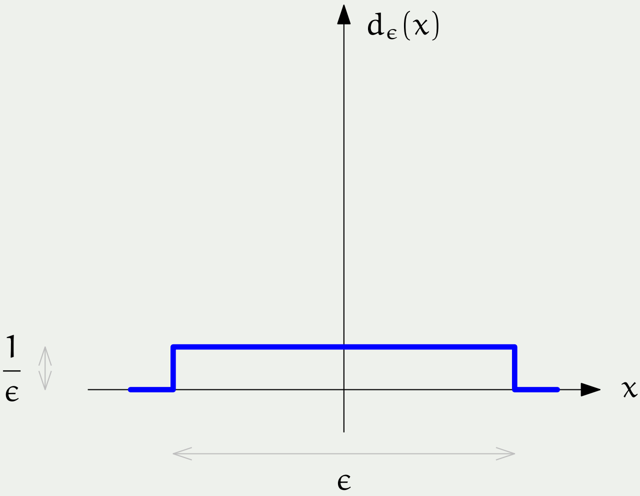
$$d_\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon}, & -\dfrac{\epsilon}{2} \leq x \leq \dfrac{\epsilon}{2}, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

é um retângulo centrado na origem de largura ϵ e altura $1/\epsilon$.

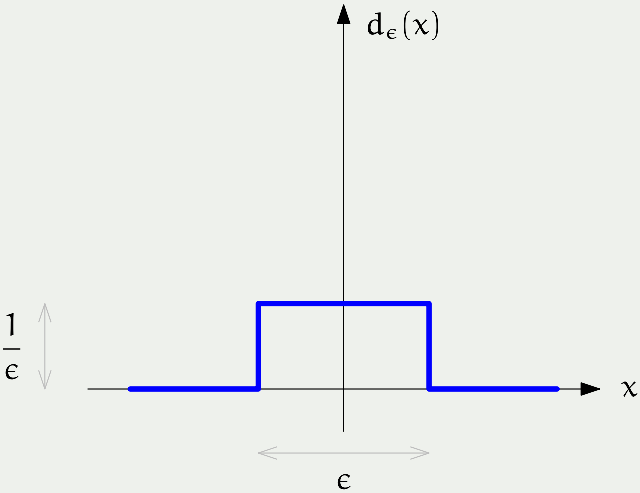


P.A.M. Dirac
(1902–1984)

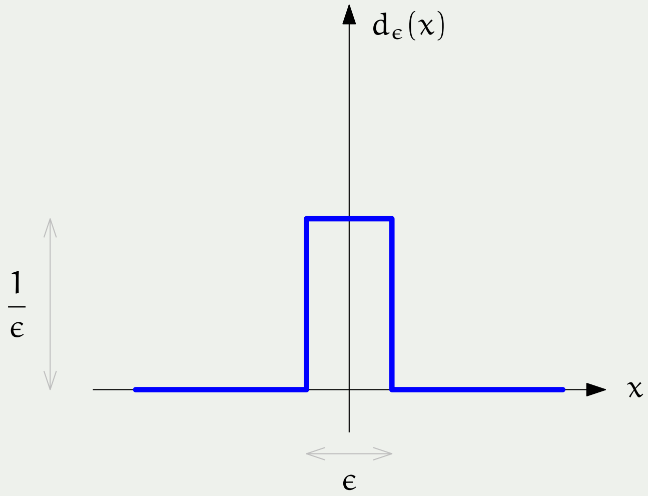
Função impulso: Ilustração



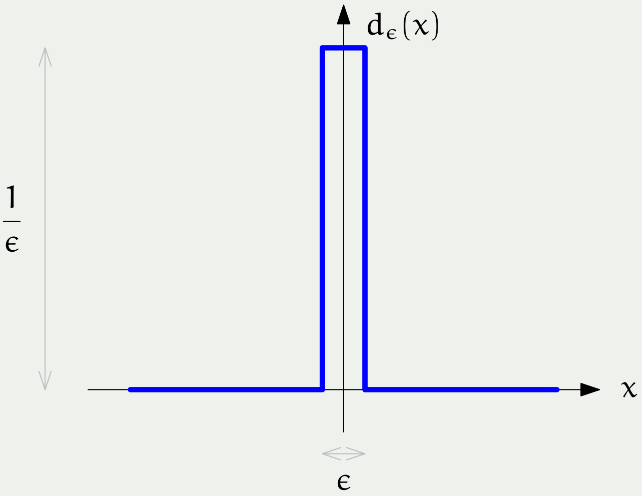
Função impulso: Ilustração



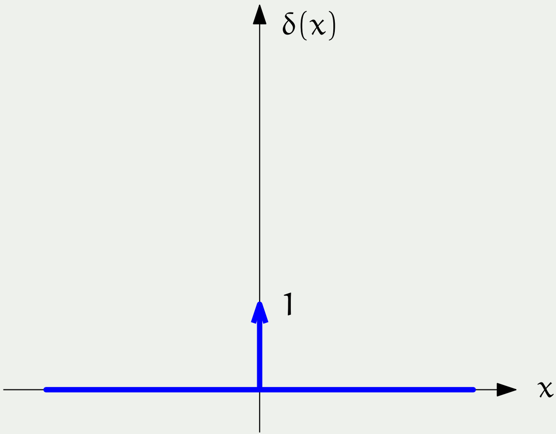
Função impulso: Ilustração



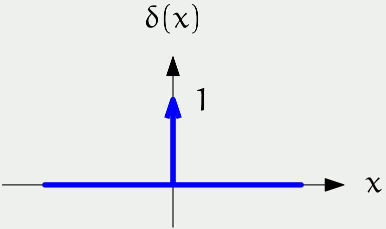
Função impulso: Ilustração



Função impulso: Ilustração

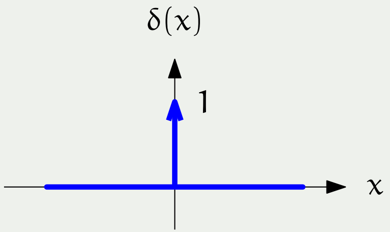


1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$$



Função impulso: Propriedades

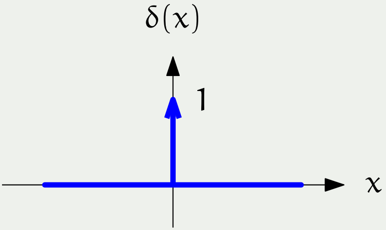
1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \delta(v)\,dv$



Função impulso: Propriedades

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$$

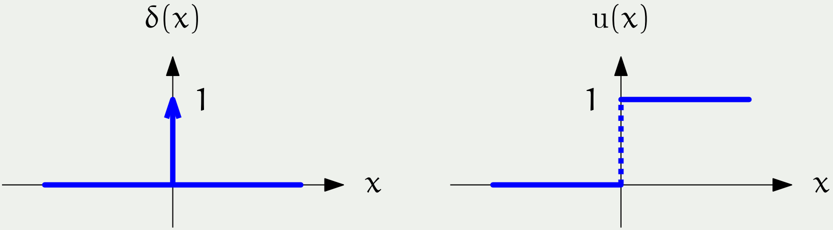
2. $$\int_{-\infty}^{x} \delta(v)\,dv = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$



Função impulso: Propriedades

1 $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$$

2 $$\int_{-\infty}^{x} \delta(v)\,dv = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} = u(x)$$

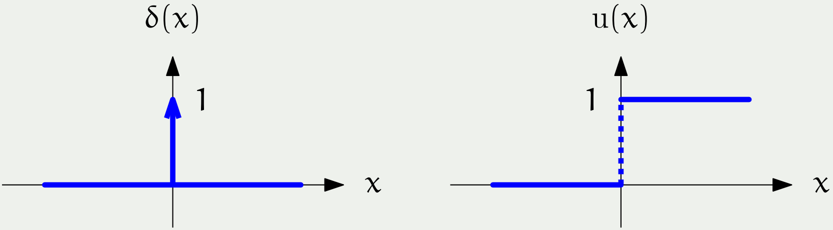


Função impulso: Propriedades

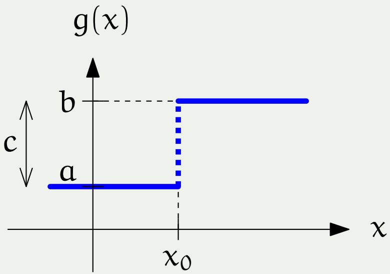
1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$$

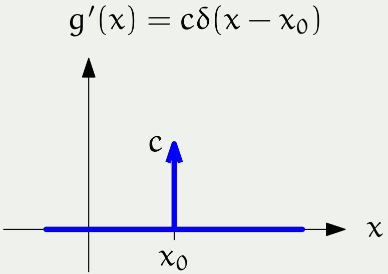
2. $$\int_{-\infty}^{x} \delta(v)\,dv = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} = u(x)$$

3. $$\frac{d}{dx} u(x) = u'(x) = \delta(x)$$

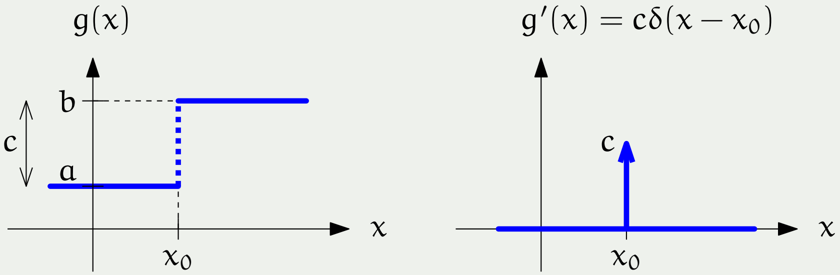


Generalizando:





Generalizando:



A derivada de uma **descontinuidade** de salto c é um **impulso** de área c.

PDF para VAs discretas

PDF para VAs discretas

É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

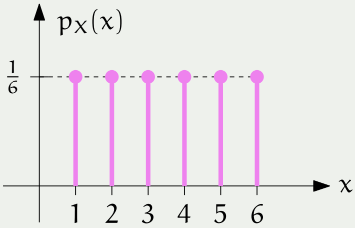
Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$. Determine a PDF de X.

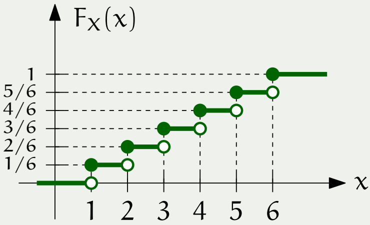
É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$. Determine a PDF de X.

Já conhecemos a PMF e a CDF de X:





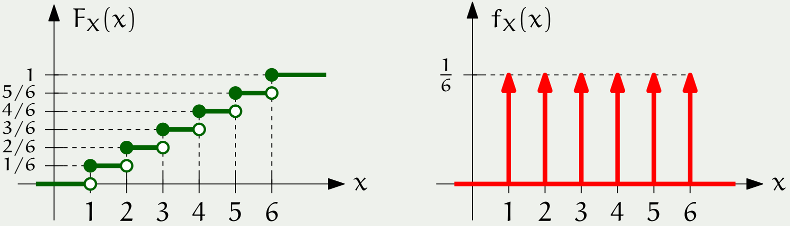
PDF para VAs discretas

É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$. Determine a PDF de X.

Sabendo que $f_X(x) = F'_X(x)$, obtemos a PDF de X:



É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$. Determine a PDF de X.

Algebricamente:

$$f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{6}\delta(x-2) + \cdots + \frac{1}{6}\delta(x-6)$$

É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$. Determine a PDF de X.

Algebricamente:

$$f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{6}\delta(x-2) + \cdots + \frac{1}{6}\delta(x-6)$$

De modo geral:

$$f_X(x) = \sum_{u \in S_X} p_X(u)\delta(x-u)$$

É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

Exemplo

Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$. Determine a PDF de X.

Algebricamente:

$$f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{6}\delta(x-2) + \cdots + \frac{1}{6}\delta(x-6)$$

De modo geral:

$$f_X(x) = \sum_{u \in S_X} p_X(u)\delta(x-u)$$

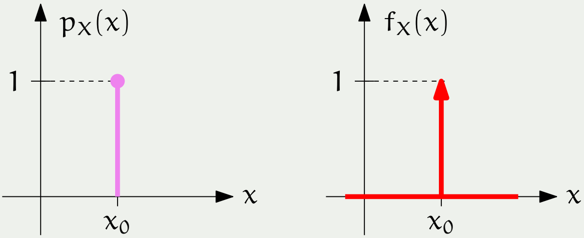
Basta substituir **massas** por **impulsos**.

Exemplo

Seja $X = x_0$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante (i.e., X é uma variável aleatória determinística). Determine a PDF de X.

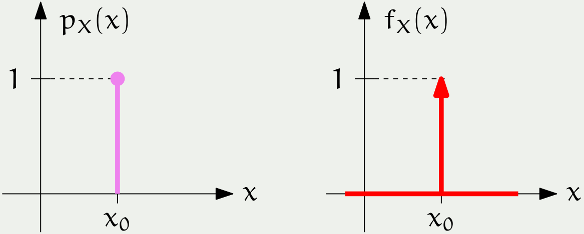
Exemplo

Seja $X = x_0$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante (i.e., X é uma variável aleatória determinística). Determine a PDF de X.



Exemplo

Seja $X = x_0$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante (i.e., X é uma variável aleatória determinística). Determine a PDF de X.



$$f_X(x) = \delta(x - x_0)$$

Variáveis aleatórias mistas

Variáveis aleatórias mistas: Definição

Definição

Uma **variável aleatória mista** é uma VA que possui *parte discreta* e *parte contínua*.

Definição

Uma **variável aleatória mista** é uma VA que possui *parte discreta* e *parte contínua*.

A PDF de uma VA mista possui tanto **impulsos** quanto trechos de **densidade finita**.

Definição

Uma **variável aleatória mista** é uma VA que possui *parte discreta* e *parte contínua*.

A PDF de uma VA mista possui tanto **impulsos** quanto trechos de **densidade finita**.

A CDF de uma VA mista possui tanto **descontinuidades** quanto trechos contínuos **estritamente crescentes**.

Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}([0, 4])$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \text{Uniform}([0, 2])$.
- Caso contrário, então $X \sim \text{Bernoulli}(2/3)$.

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de X.

Intuição:

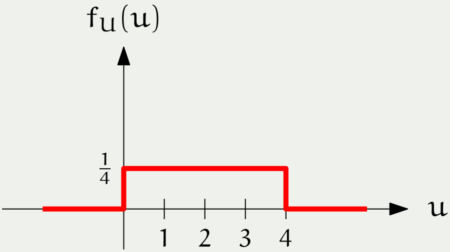
U	3.34	3.78	3.12	3.30	0.43	3.27	3.37	3.65	1.72	2.27	1.49	0.33	2.72	1.91	1.45	0.85	1.14	0.10
X	1.00	0.00	0.00	1.00	0.83	0.00	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.37	1.00	1.00	1.00	1.04	1.00	1.38

Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Uniform}([0,4])$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \mathrm{Uniform}([0,2])$.
- Caso contrário, então $X \sim \mathrm{Bernoulli}(2/3)$.

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de X.

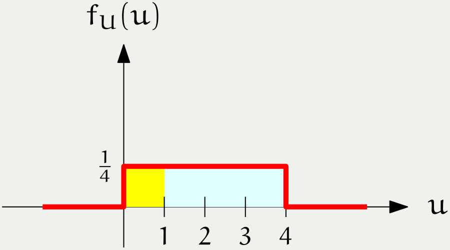


Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Uniform}([0, 4])$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \mathrm{Uniform}([0, 2])$.
- Caso contrário, então $X \sim \mathrm{Bernoulli}(2/3)$.

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de X.



$\Pr[U \leqslant 1] = \frac{1}{4}$

$\Pr[U > 1] = \frac{3}{4}$

Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Uniform}([0,4])$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \mathrm{Uniform}([0,2])$.
- Caso contrário, então $X \sim \mathrm{Bernoulli}(2/3)$.

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de X.

PDF:

Pelo **teorema da probabilidade total**:

$$f_X(x) = f_X(x \mid U \leq 1) \Pr[U \leq 1] \; + \; f_X(x \mid U > 1) \Pr[U > 1]$$

Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Uniform}([0,4])$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \mathrm{Uniform}([0,2])$.
- Caso contrário, então $X \sim \mathrm{Bernoulli}(2/3)$.

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de X.

PDF:

Pelo **teorema da probabilidade total**:

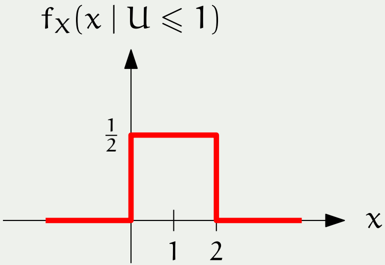
$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \mathrm{Uniform}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \mathrm{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

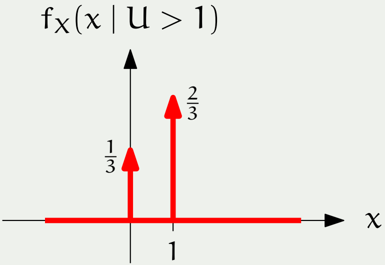
Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \le 1)}_{\sim \text{Uniform}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \le 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

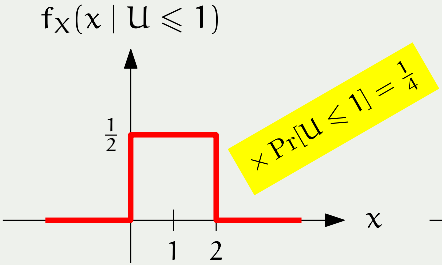
$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \le 1)}_{\sim\text{Uniform}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \le 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim\text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

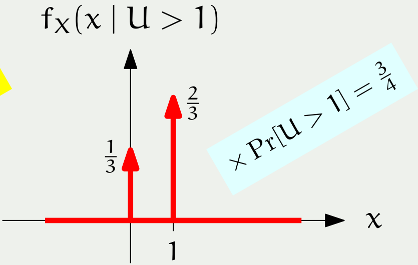




Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim\text{Uniform}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim\text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$





$\frac{1}{2}[0 \leqslant x \leqslant 2]$

$\frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\delta(x-1)$

Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \le 1)}_{\sim\text{Uniform}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \le 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim\text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}[0 \le x \le 2] \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\delta(x-1)\right) \times \frac{3}{4}$$

Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \le 1)}_{\sim\text{Uniform}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \le 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim\text{Bernoulli}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

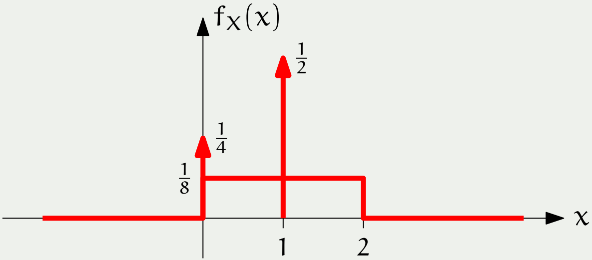
$$f_X(x) = \frac{1}{2}[0 \le x \le 2] \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\delta(x-1)\right) \times \frac{3}{4}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{8}[0 \le x \le 2] + \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$$

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \le 1)}_{\sim\text{Uniform}([0,2])}\ \underbrace{\Pr[U \le 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim\text{Bernoulli}(2/3)}\ \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$$f_X(x) = \tfrac{1}{2}[0 \le x \le 2] \times \frac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{3}\delta(x) + \tfrac{2}{3}\delta(x-1)\right) \times \frac{3}{4}$$

$$f_X(x) = \tfrac{1}{8}[0 \le x \le 2] + \tfrac{1}{4}\delta(x) + \tfrac{1}{2}\delta(x-1)$$



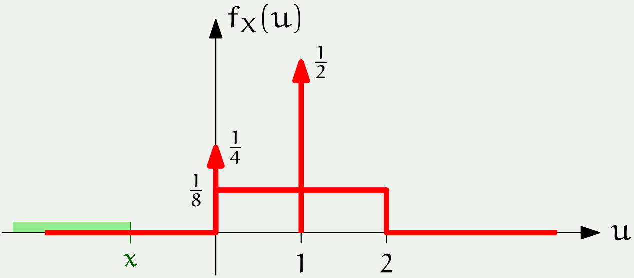
Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x^+} f_X(u)\,du$$

Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

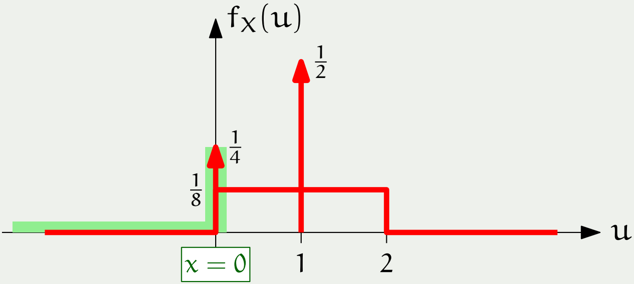
CDF:



Caso $x < 0$:

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} 0 \, du}_{0}$$

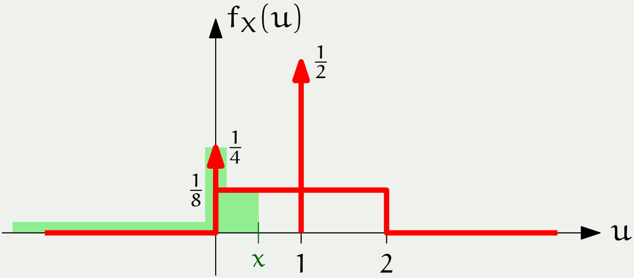
CDF:



Caso $x = 0$:

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_{0} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}}$$

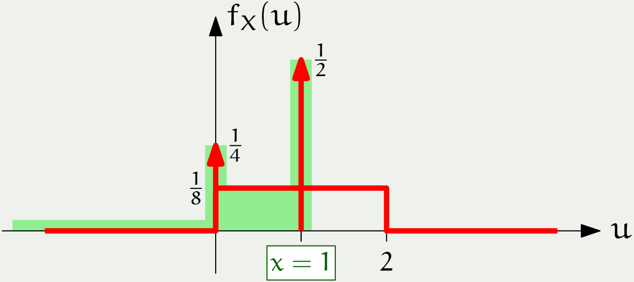
CDF:



Caso $0 < x < 1$:

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_{0} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^{x} \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8} x}$$

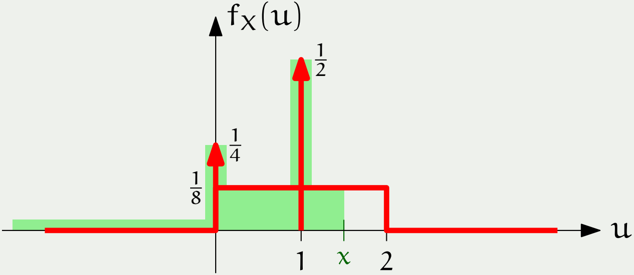
CDF:



Caso $x = 1$:

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0\,du}_{0} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \tfrac{1}{4}\delta(u)\,du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^{1^-} \tfrac{1}{8}\,du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{1^-}^{1^+} \tfrac{1}{2}\delta(u-1)\,du}_{\frac{1}{2}}$$

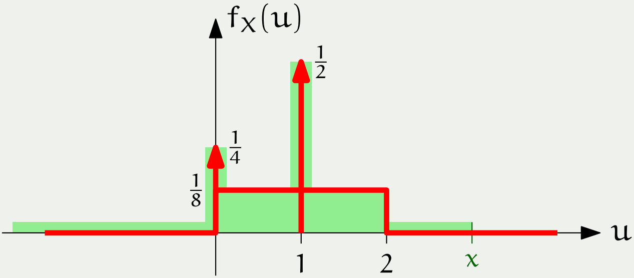
CDF:



Caso $1 < x < 2$:

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0\,du}_{0} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4}\delta(u)\,du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{8}\,du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2}\delta(u-1)\,du}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{1^+}^{x} \frac{1}{8}\,du}_{\frac{1}{8}(x-1)}$$

CDF:



Caso $x \geq 2$:

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0\,du}_{0} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4}\delta(u)\,du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{8}\,du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2}\delta(u-1)\,du}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{1^+}^{2} \frac{1}{8}\,du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{2}^{x} 0\,du}_{0}$$

Sumário:

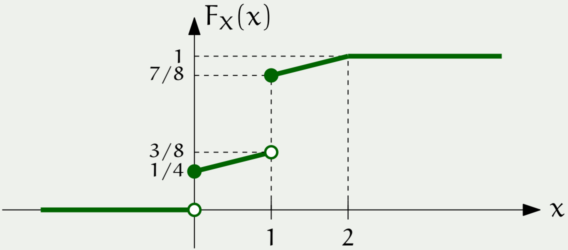
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{7}{8}, & x = 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x-1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

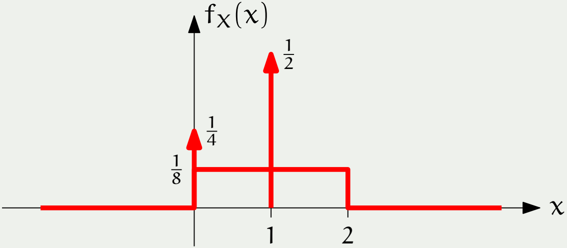
Sumário:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{7}{8}, & x = 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x-1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x-1), & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

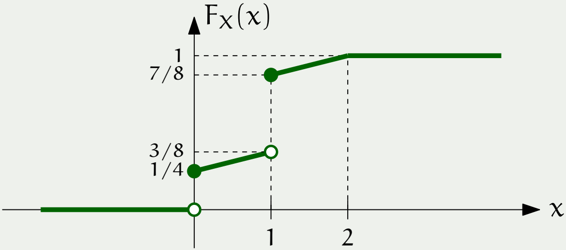
Sumário:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{7}{8}, & x = 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x-1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x-1), & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$



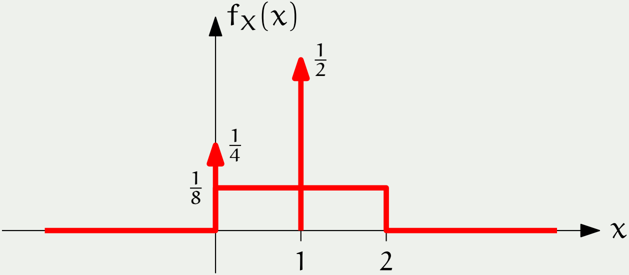


$f_X(x)$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$
x
1
2



$F_X(x)$
1
7/8
3/8
1/4
x
1
2

Valor esperado: **Solução 1:** Pela **definição do valor esperado**:



$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{0^-}^{0^+} x\, \frac{1}{4} \delta(x)\, dx + \int_{0^+}^{1^-} x\, \frac{1}{8}\, dx + \int_{1^-}^{1^+} x\, \frac{1}{2} \delta(x-1)\, dx + \int_{1^+}^{2} x\, \frac{1}{8}\, dx$$

Valor esperado: **Solução 1:** Pela **definição do valor esperado**:

$$E[X] = \int_{0^-}^{0^+} x\,\frac{1}{4}\delta(x)\,dx + \int_{0^+}^{1^-} x\,\frac{1}{8}\,dx + \int_{1^-}^{1^+} x\,\frac{1}{2}\delta(x-1)\,dx + \int_{1^+}^{2} x\,\frac{1}{8}\,dx$$

Valor esperado: **Solução 1:** Pela **definição do valor esperado**:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{0^-}^{0^+} x\,\frac{1}{4}\delta(x)\,dx + \int_{0^+}^{1^-} x\,\frac{1}{8}\,dx + \int_{1^-}^{1^+} x\,\frac{1}{2}\delta(x-1)\,dx + \int_{1^+}^{2} x\,\frac{1}{8}\,dx \\
&= \int_{0^-}^{0^+} 0\,\frac{1}{4}\delta(x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,\frac{1}{8}\,dx + \int_{1^-}^{1^+} 1\,\frac{1}{2}\delta(x-1)\,dx + \int_{1}^{2} x\,\frac{1}{8}\,dx
\end{aligned}
$$

Valor esperado: **Solução 1:** Pela **definição do valor esperado**:

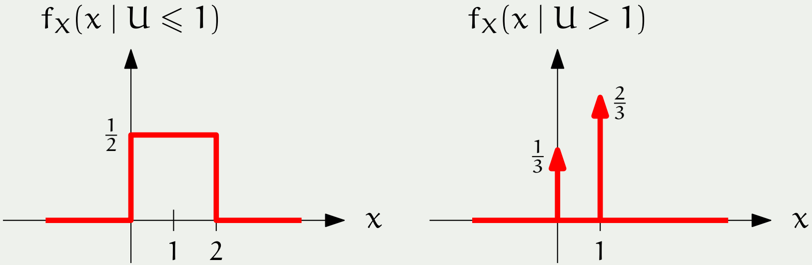
$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4}\delta(x)\,dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8}\,dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2}\delta(x-1)\,dx + \int_{1^+}^{2} x \frac{1}{8}\,dx \\
&= \int_{0^-}^{0^+} 0 \frac{1}{4}\delta(x)\,dx + \int_{0}^{1} x \frac{1}{8}\,dx + \int_{1^-}^{1^+} 1 \frac{1}{2}\delta(x-1)\,dx + \int_{1}^{2} x \frac{1}{8}\,dx \\
&= 0 \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx + \left[\frac{x^2}{16}\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2}\int_{1^-}^{1^+} \delta(x-1)\,dx + \left[\frac{x^2}{16}\right]_{x=1}^{x=2}
\end{aligned}
$$

Valor esperado: **Solução 1:** Pela **definição do valor esperado**:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{0^-}^{0^+} x\,\frac{1}{4}\delta(x)\,dx + \int_{0^+}^{1^-} x\,\frac{1}{8}\,dx + \int_{1^-}^{1^+} x\,\frac{1}{2}\delta(x-1)\,dx + \int_{1^+}^{2} x\,\frac{1}{8}\,dx \\
&= \int_{0^-}^{0^+} 0\,\frac{1}{4}\delta(x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,\frac{1}{8}\,dx + \int_{1^-}^{1^+} 1\,\frac{1}{2}\delta(x-1)\,dx + \int_{1}^{2} x\,\frac{1}{8}\,dx \\
&= 0\int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx + \left[\frac{x^2}{16}\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2}\int_{1^-}^{1^+} \delta(x-1)\,dx + \left[\frac{x^2}{16}\right]_{x=1}^{x=2} \\
&= 0\cdot 1 + \left[\frac{1}{16} - \frac{0}{16}\right] + \frac{1}{2}\cdot 1 + \left[\frac{4}{16} - \frac{1}{16}\right] = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

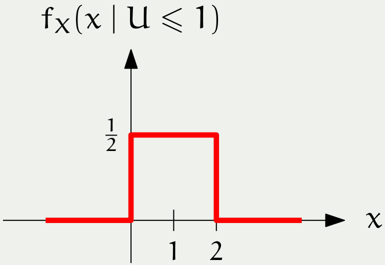
Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

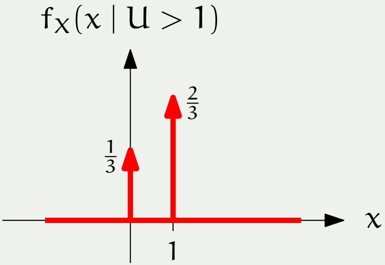
Valor esperado: **Solução 2:** Pelo **teorema da probabilidade total**:



$$E[X] = E[X \mid U \leq 1]\,\Pr[U \leq 1] + E[X \mid U > 1]\,\Pr[U > 1]$$

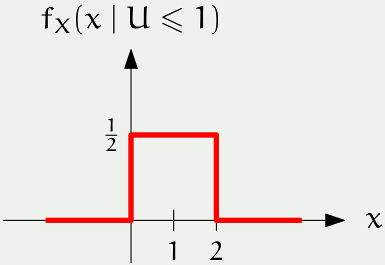
Valor esperado: **Solução 2:** Pelo **teorema da probabilidade total**:

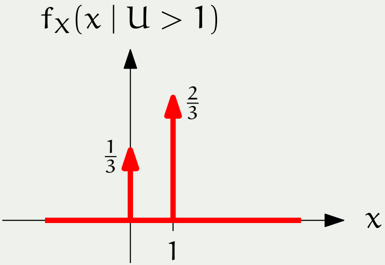




$$E[X] = \underbrace{E[X \mid U \leq 1]}_{1} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{E[X \mid U > 1]}_{\frac{2}{3}} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

Valor esperado: **Solução 2:** Pelo **teorema da probabilidade total**:





$$E[X] = \underbrace{E[X \mid U \le 1]}_{1}\underbrace{\Pr[U \le 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{E[X \mid U > 1]}_{\frac{2}{3}}\underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$

Exercícios propostos

Yates–Goodman

- 4.7.1.
- 4.7.2.
- 4.7.3.
- 4.7.6.
- 4.7.7.

Esboce sua resposta sempre que possível.

Referências

Referências

Roy D. Yates and David J. Goodman.
***Probability and Stochastic Processes*.**
Wiley, 3rd edition, 2014.