Processos Estocásticos

Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006
ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

PMF conjunta e marginais

PMF conjunta: Definição e propriedades

Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **função massa de probabilidade conjunta** de X e Y, denotada por $p_{X,Y}$, é definida por

$$p_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x \wedge Y = y],$$

para $x \in S_X$ e $y \in S_Y$.

PMF conjunta: Definição e propriedades

Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **função massa de probabilidade conjunta** de X e Y, denotada por $p_{X,Y}$, é definida por

$$p_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x \land Y = y],$$

para $x \in S_X$ e $y \in S_Y$.

Propriedades

1. $0 \leq p_{X,Y}(x, y) \leq 1, \ \forall x, y$
2. $\sum_{x,y} p_{X,Y}(x, y) = 1$

PMF conjunta: Exemplo

Exemplo

Considere uma urna com duas bolas vermelhas (R), uma bola verde (G) e uma bola azul (B). Retira-se duas bolas, sem reposição. Seja X o nº de bolas R e Y o nº de bolas G retiradas. Determine a PMF conjunta de X e Y.

Exemplo

Considere uma urna com duas bolas vermelhas (R), uma bola verde (G) e uma bola azul (B). Retira-se duas bolas, sem reposição. Seja X o nº de bolas R e Y o nº de bolas G retiradas. Determine a PMF conjunta de X e Y.

B_1	B_2	X	Y	Pr
R	R	2	0	1/6
R	G	1	1	1/6
R	B	1	0	1/6
G	R	1	1	1/6
G	B	0	1	1/12
B	R	1	0	1/6
B	G	0	1	1/12

PMF conjunta: Exemplo

Exemplo

Considere uma urna com duas bolas vermelhas (R), uma bola verde (G) e uma bola azul (B). Retira-se duas bolas, sem reposição. Seja X o nº de bolas R e Y o nº de bolas G retiradas. Determine a PMF conjunta de X e Y.

B_1	B_2	X	Y	Pr
R	R	2	0	1/6
R	G	1	1	1/6
R	B	1	0	1/6
G	R	1	1	1/6
G	B	0	1	1/12
B	R	1	0	1/6
B	G	0	1	1/12

$p_{X,Y}(x,y)$	$y=0$	$y=1$
$x=0$	0	$1/6$
$x=1$	$1/3$	$1/3$
$x=2$	$1/6$	0

PMFs marginais: Definição

Sejam X e Y duas VAs discretas com PMF conjunta $p_{X,Y}$.

Definição

As **PMFs marginais** de X e Y são dadas por

$$p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{X,Y}(x, y)$$

e

$$p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{X,Y}(x, y)$$

PMFs marginais: Exemplo

Exemplo

Considere o exemplo anterior (urna com 2R, 1G, 1B). Foi visto que a PMF conjunta de X e Y é dada por:

$p_{X,Y}(x,y)$		
	$y=0$	$y=1$
$x=0$	0	$1/6$
$x=1$	$1/3$	$1/3$
$x=2$	$1/6$	0

Determine as PMFs marginais de X e de Y.

PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=0$	0	$1/6$	
$x=1$	$1/3$	$1/3$	
$x=2$	$1/6$	0	
$p_Y(y)$			

PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=0$	0	$1/6$	$1/6$
$x=1$	$1/3$	$1/3$	
$x=2$	$1/6$	0	
$p_Y(y)$			

- $p_X(x=0) \;=\; p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$

PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	$1/6$	$1/6$
$x = 1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x = 2$	$1/6$	0	
$p_Y(y)$			

- $p_X(x=0) \;=\; p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) \;=\; p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$

PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=0$	0	$1/6$	$1/6$
$x=1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x=2$	$1/6$	0	$1/6$
$p_Y(y)$			

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0,y=0) + p_{X,Y}(x=0,y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1,y=0) + p_{X,Y}(x=1,y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2,y=0) + p_{X,Y}(x=2,y=1) = 1/6$

PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	$1/6$	$1/6$
$x = 1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x = 2$	$1/6$	0	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/2$		

- $p_X(x=0) \;=\; p_{X,Y}(x=0,y=0) + p_{X,Y}(x=0,y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) \;=\; p_{X,Y}(x=1,y=0) + p_{X,Y}(x=1,y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) \;=\; p_{X,Y}(x=2,y=0) + p_{X,Y}(x=2,y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) \;=\; p_{X,Y}(x=0,y=0) + p_{X,Y}(x=1,y=0) + p_{X,Y}(x=2,y=0) = 1/2$

PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=0$	0	$1/6$	$1/6$
$x=1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x=2$	$1/6$	0	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/2$	$1/2$	

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0,y=0) + p_{X,Y}(x=0,y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1,y=0) + p_{X,Y}(x=1,y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2,y=0) + p_{X,Y}(x=2,y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0,y=0) + p_{X,Y}(x=1,y=0) + p_{X,Y}(x=2,y=0) = 1/2$
- $p_Y(y=1) = p_{X,Y}(x=0,y=1) + p_{X,Y}(x=1,y=1) + p_{X,Y}(x=2,y=1) = 1/2$

PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=0$	0	$1/6$	$1/6$
$x=1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x=2$	$1/6$	0	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/2$	$1/2$	1

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=0) = 1/2$
- $p_Y(y=1) = p_{X,Y}(x=0, y=1) + p_{X,Y}(x=1, y=1) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/2$

PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	$1/6$	$1/6$
$x = 1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x = 2$	$1/6$	0	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/2$	$1/2$	1

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0,y=0) + p_{X,Y}(x=0,y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1,y=0) + p_{X,Y}(x=1,y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2,y=0) + p_{X,Y}(x=2,y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0,y=0) + p_{X,Y}(x=1,y=0) + p_{X,Y}(x=2,y=0) = 1/2$
- $p_Y(y=1) = p_{X,Y}(x=0,y=1) + p_{X,Y}(x=1,y=1) + p_{X,Y}(x=2,y=1) = 1/2$

Basta somar linhas e colunas.

PDF conjunta e marginais

Relembrando...

Seja X uma VA.

A **PDF** de X, denotada por f_X, é tal que

$$\Pr[X \in A] = \int_A f_X(x)\,dx,$$

para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definição (indireta)

Sejam X e Y duas VAs (definidas no mesmo experimento probabilístico).

A **PDF conjunta** de X e Y, denotada por $f_{X,Y}$, é tal que

$$\Pr[(X,Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy,$$

para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definição (indireta)

Sejam X e Y duas VAs (definidas no mesmo experimento probabilístico).

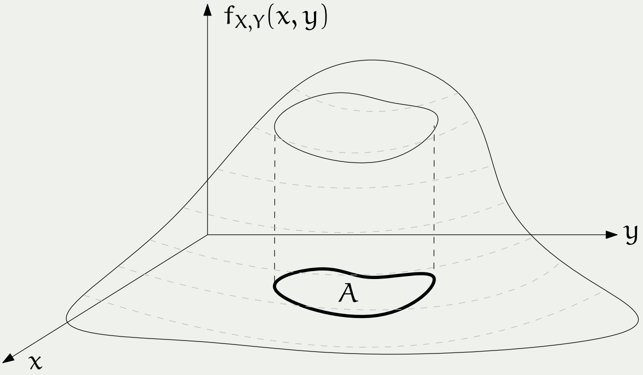
A **PDF conjunta** de X e Y, denotada por $f_{X,Y}$, é tal que

$$\Pr[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy,$$

para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Propriedades

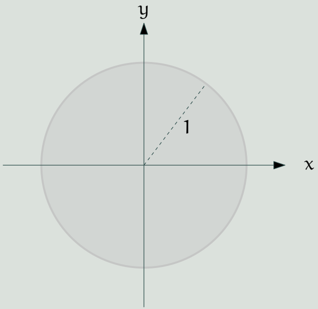
1. $f_{X,Y}(x, y) \geq 0, \ \forall x, y$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy = 1$



$$\Pr[(X,Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Exemplo

Sejam X e Y duas VAs com PDF conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada abaixo.



Determine a PDF conjunta de X e Y. Vídeo relacionado: YouTube

PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro} = (0,0), \text{raio} = 1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

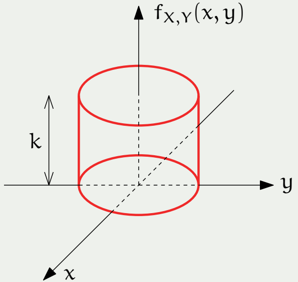
onde k é uma constante.

PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro} = (0,0), \text{raio} = 1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

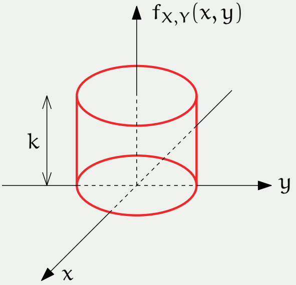
onde k é uma constante.



A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro} = (0,0), \text{raio} = 1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.

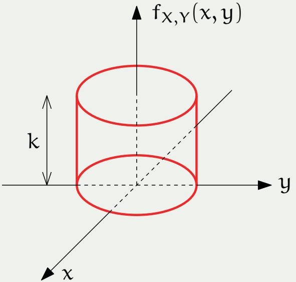


$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro} = (0,0), \text{raio} = 1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.



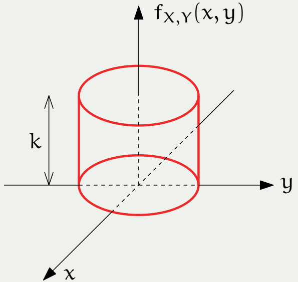
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\pi \cdot k = 1$$

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro} = (0,0), \text{raio} = 1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\pi \cdot k = 1$$

$$k = \frac{1}{\pi}$$

PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro} = (0,0), \text{raio} = 1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.

Portanto:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

PDFs marginais: Definição

Sejam X e Y duas VAs com PDF conjunta $f_{X,Y}$.

Definição

As **PDFs marginais** de X e Y são dadas por

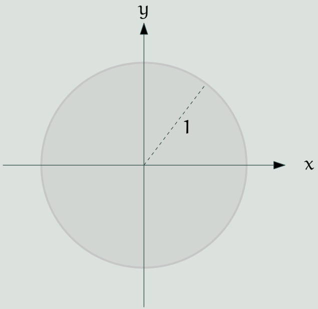
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

e

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

Exemplo

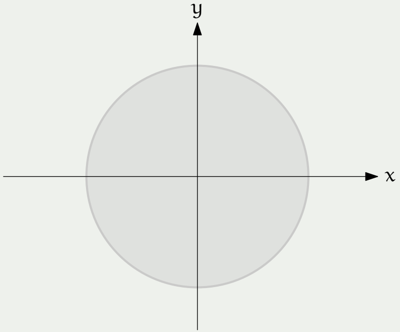
Sejam X e Y duas VAs com PDF conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada abaixo.



Determine as PDFs marginais de X e de Y.

PDFs marginais: Exemplo

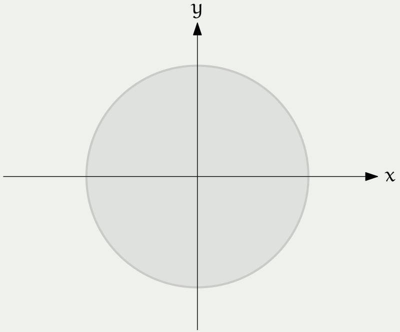
Já foi visto que a PDF conjunta é dada por $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]$.



PDFs marginais: Exemplo

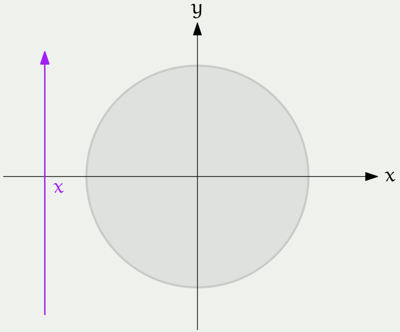
Já foi visto que a PDF conjunta é dada por $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$$



Já foi visto que a PDF conjunta é dada por $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$$



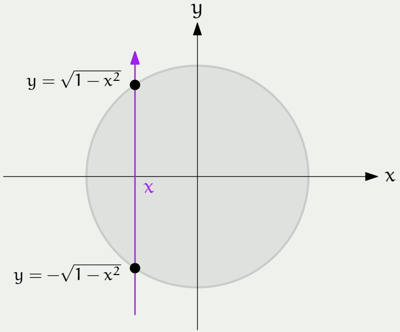
1. Caso $x < -1$ ou $x > 1$:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} 0\, dy = 0$$

PDFs marginais: Exemplo

Já foi visto que a PDF conjunta é dada por $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$$



1. Caso $x < -1$ ou $x > 1$:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} 0\, dy = 0$$

2. Caso $-1 \leq x \leq 1$:

$$f_X(x) = \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy$$
$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}$$

Portanto:

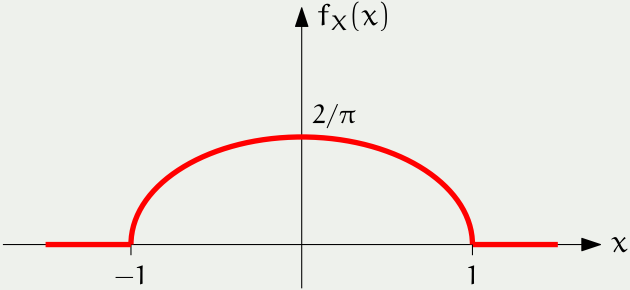
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto:

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}[-1 \leq x \leq 1]$$

Portanto:

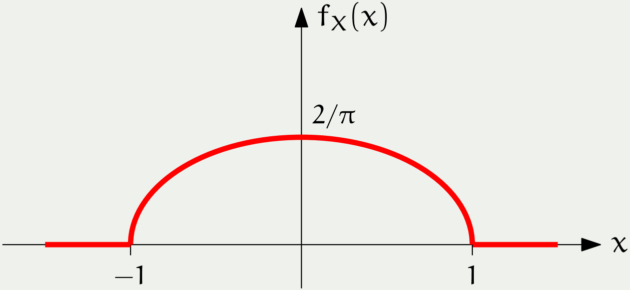
$$f_X(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}[-1 \le x \le 1]$$



PDFs marginais: Exemplo

Portanto:

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}[-1 \leq x \leq 1]$$



Analogamente:

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}[-1 \leq y \leq 1]$$

Independência

Definição

Duas VAs X e Y são ditas ser **(estatisticamente) independentes** se

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y) \qquad \text{(caso discreto)}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \qquad \text{(caso geral)}$$

Definição

Duas VAs X e Y são ditas ser **(estatisticamente) independentes** se

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y) \qquad \text{(caso discreto)}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) \qquad \text{(caso geral)}$$

A conjunta se fatora no produto das marginais.

Exemplo 1

Exemplo

Sejam $U \sim \mathrm{DiscreteUniform}(0, 2)$ e $V \sim \mathrm{Binomial}(n = 2, p = \frac{1}{2})$ duas VAs independentes.

a. Determine as PMFs marginais de U e de V.
b. Determine a PMF conjunta de U e V.

Sejam $X = U + V$ e $Y = UV$.

c. Determine a PMF conjunta de X e Y.
d. Determine as PMFs marginais de X e de Y.

Exemplo 1

a. Determine as PMFs marginais de U e de V.

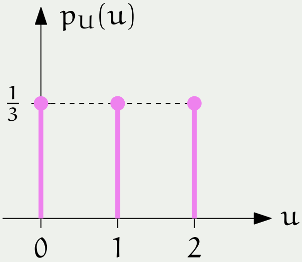
Exemplo 1

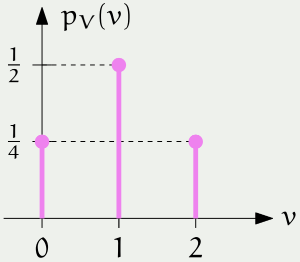
a Determine as PMFs marginais de U e de V.

$$U \sim \mathrm{DiscreteUniform}(0, 2) \qquad V \sim \mathrm{Binomial}(n = 2, p = \tfrac{1}{2})$$

a Determine as PMFs marginais de U e de V.

$$U \sim \mathrm{DiscreteUniform}(0, 2) \qquad V \sim \mathrm{Binomial}(n=2, p=\tfrac{1}{2})$$





Exemplo 1

b Determine a PMF conjunta de U e V.

Exemplo 1

b Determine a PMF conjunta de U e V.

$$U \text{ e } V \text{ independentes} \implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u)\,p_V(v).$$

Exemplo 1

b Determine a PMF conjunta de U e V.

$$U \text{ e } V \text{ independentes} \implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u)\, p_V(v).$$

$p_{U,V}(u,v)$				
	$v=0$	$v=1$	$v=2$	$p_U(u)$
$u=0$				$1/3$
$u=1$				$1/3$
$u=2$				$1/3$
$p_V(v)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

b Determine a PMF conjunta de U e V.

$$U \text{ e } V \text{ independentes} \implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u)\, p_V(v).$$

$p_{U,V}(u,v)$				
	$v=0$	$v=1$	$v=2$	$p_U(u)$
$u=0$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$u=1$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$u=2$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$p_V(v)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

Exemplo 1

b Determine a PMF conjunta de U e V.

$$U \text{ e } V \text{ independentes} \implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u)\,p_V(v).$$

$p_{U,V}(u,v)$				
	$v=0$	$v=1$	$v=2$	$p_U(u)$
$u=0$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$u=1$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$u=2$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$p_V(v)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

As linhas/colunas são múltiplas umas das outras.

Exemplo 1

c Determine a PMF conjunta de X e Y.

Exemplo 1

c Determine a PMF conjunta de X e Y.

U	V	X	Y	Pr
0	0	0	0	1/12
0	1	1	0	2/12
0	2	2	0	1/12
1	0	1	0	1/12
1	1	2	1	2/12
1	2	3	2	1/12
2	0	2	0	1/12
2	1	3	2	2/12
2	2	4	4	1/12

c Determine a PMF conjunta de X e Y.

U	V	X	Y	Pr
0	0	0	0	1/12
0	1	1	0	2/12
0	2	2	0	1/12
1	0	1	0	1/12
1	1	2	1	2/12
1	2	3	2	1/12
2	0	2	0	1/12
2	1	3	2	2/12
2	2	4	4	1/12

$p_{X,Y}(x,y)$				
	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=4$
$x=0$	1/12	0	0	0
$x=1$	3/12	0	0	0
$x=2$	2/12	2/12	0	0
$x=3$	0	0	3/12	0
$x=4$	0	0	0	1/12

Exemplo 1

d Determine as PMFs marginais de X e de Y.

d Determine as PMFs marginais de X e de Y.

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=4$	$p_X(x)$
$x=0$	$1/12$	0	0	0	
$x=1$	$3/12$	0	0	0	
$x=2$	$2/12$	$2/12$	0	0	
$x=3$	0	0	$3/12$	0	
$x=4$	0	0	0	$1/12$	
$p_Y(y)$					

d Determine as PMFs marginais de X e de Y.

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=4$	$p_X(x)$
$x=0$	$1/12$	0	0	0	$1/12$
$x=1$	$3/12$	0	0	0	$3/12$
$x=2$	$2/12$	$2/12$	0	0	$4/12$
$x=3$	0	0	$3/12$	0	$3/12$
$x=4$	0	0	0	$1/12$	$1/12$
$p_Y(y)$	$6/12$	$2/12$	$3/12$	$1/12$	

Exemplo 1

d Determine as PMFs marginais de X e de Y.

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=4$	$p_X(x)$
$x=0$	$1/12$	0	0	0	$1/12$
$x=1$	$3/12$	0	0	0	$3/12$
$x=2$	$2/12$	$2/12$	0	0	$4/12$
$x=3$	0	0	$3/12$	0	$3/12$
$x=4$	0	0	0	$1/12$	$1/12$
$p_Y(y)$	$6/12$	$2/12$	$3/12$	$1/12$	1

Exemplo 1

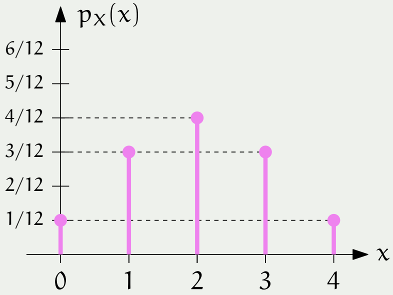
d Determine as PMFs marginais de X e de Y.

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=4$	$p_X(x)$
$x=0$	$1/12$	0	0	0	$1/12$
$x=1$	$3/12$	0	0	0	$3/12$
$x=2$	$2/12$	$2/12$	0	0	$4/12$
$x=3$	0	0	$3/12$	0	$3/12$
$x=4$	0	0	0	$1/12$	$1/12$
$p_Y(y)$	$6/12$	$2/12$	$3/12$	$1/12$	1

X e Y são dependentes.

Exemplo 1

d Determine as PMFs marginais de X e de Y.



Exemplo 2

Exemplo

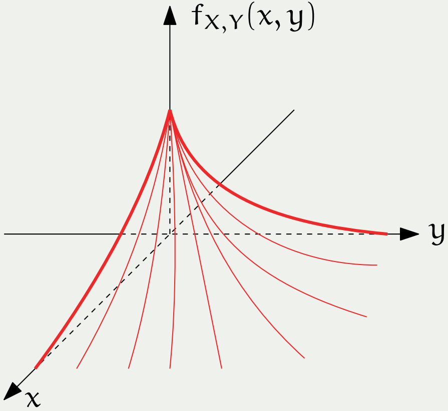
Sejam X e Y duas VAs com PDF conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x, y \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- a Determine as PDFs marginais de X e de Y.
- b São X e Y dependentes ou independentes?

Exemplo 2

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)}[x \geq 0 \wedge y \geq 0]$$



Exemplo 2

a Determine as PDFs marginais de X e de Y.

Exemplo 2

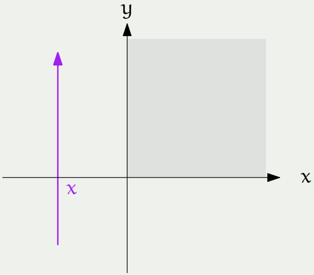
a Determine as PDFs marginais de X e de Y.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$$

Exemplo 2

a. Determine as PDFs marginais de X e de Y.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$$

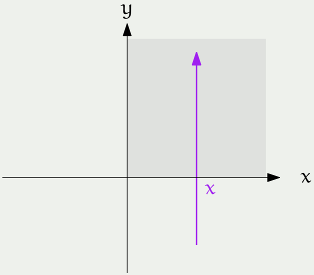


- Caso $x < 0$:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} 0\, dy = 0$$

a Determine as PDFs marginais de X e de Y.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$



- Caso $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{y=-\infty}^{y=0} 0\,dy + \int_{y=0}^{y=\infty} e^{-(x+y)}\,dy \\ &= e^{-x} \int_{y=0}^{y=\infty} e^{-y}\,dy \\ &= e^{-x}\Big[-e^{-y}\Big]_{y=0}^{y=\infty} \\ &= e^{-x}[-0-(-1)] = e^{-x} \end{aligned}$$

Exemplo 2

Portanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \qquad \text{[ou seja, } X \sim \mathrm{Exponential}(1)\text{]}$$

Exemplo 2

Portanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \qquad \text{[ou seja, } X \sim \mathrm{Exponential}(1)\text{]}$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \qquad \text{[ou seja, } Y \sim \mathrm{Exponential}(1)\text{]}$$

Exemplo 2

Portanto:

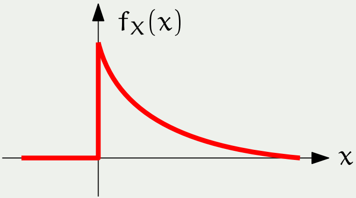
$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

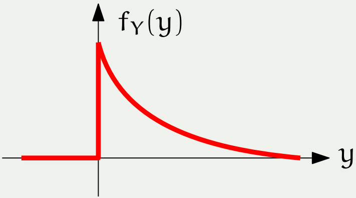
[ou seja, $X \sim \text{Exponential}(1)$]

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

[ou seja, $Y \sim \text{Exponential}(1)$]





Exemplo 2

b São X e Y dependentes ou independentes?

Exemplo 2

b São X e Y dependentes ou independentes?

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)}[x \geq 0 \wedge y \geq 0]$$

Exemplo 2

b São X e Y dependentes ou independentes?

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)}[x \geq 0 \land y \geq 0] \\
&= e^{-x}e^{-y}[x \geq 0]\,[y \geq 0]
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

b São X e Y dependentes ou independentes?

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)}[x \geq 0 \wedge y \geq 0] \\ &= e^{-x}e^{-y}[x \geq 0][y \geq 0] \\ &= e^{-x}[x \geq 0]\,e^{-y}[y \geq 0] \end{aligned}$$

Exemplo 2

b São X e Y dependentes ou independentes?

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)}[x \geq 0 \wedge y \geq 0] \\
&= e^{-x}e^{-y}[x \geq 0]\,[y \geq 0] \\
&= e^{-x}[x \geq 0]\,e^{-y}[y \geq 0] \\
&= f_X(x)\,f_Y(y)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

b São X e Y dependentes ou independentes?

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)}[x \geq 0 \land y \geq 0] \\ &= e^{-x}e^{-y}[x \geq 0]\,[y \geq 0] \\ &= e^{-x}[x \geq 0]\,e^{-y}[y \geq 0] \\ &= f_X(x)\,f_Y(y) \end{aligned}$$

Portanto, X e Y são independentes.

Distribuição condicional

Caso discreto

Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Caso discreto

Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **PMF condicional** de X dado $Y = y$ é definida por

$$p_X(x \mid Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

definida apenas se $p_Y(y) \neq 0$.

Caso discreto

Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **PMF condicional** de X dado $Y = y$ é definida por

$$p_X(x \mid Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

definida apenas se $p_Y(y) \neq 0$.

Como X se distribui sabendo que $Y = y$.

Caso discreto

Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **PMF condicional** de X dado $Y = y$ é definida por

$$p_X(x \mid Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

definida apenas se $p_Y(y) \neq 0$.

Notações alternativas

$$p_X(x \mid Y = y) \; = \; p_{X|Y=y}(x) \; = \; p_{X|Y}(x \mid y)$$

Exemplo

Considere o exemplo anterior (urna com 2R, 1G, 1B). Lembre-se que X é o nº de bolas R e Y é o nº de bolas G, após retiradas duas bolas. Foi visto que a PMF conjunta de X e Y é dada por:

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=0$	0	$1/6$	$1/6$
$x=1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x=2$	$1/6$	0	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/2$	$1/2$	1

Determine as PMFs condicionais de Y dado $X = x$, para $x \in \{0, 1, 2\}$.

Exemplo

$$p_Y(y \mid X = x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$$

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

	$y = 0$	$y = 1$

Exemplo

$$p_Y(y \mid X = 0) = \frac{p_{X,Y}(0, y)}{p_X(0)}$$

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

	$y = 0$	$y = 1$
$p_Y(y \mid X = 0)$	0	1

Exemplo

$$p_Y(y \mid X = 1) = \frac{p_{X,Y}(1, y)}{p_X(1)}$$

$p_{X,Y}(x, y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

	$y = 0$	$y = 1$
$p_Y(y \mid X = 0)$	0	1
$p_Y(y \mid X = 1)$	1/2	1/2

Exemplo

$$p_Y(y \mid X = 2) = \frac{p_{X,Y}(2, y)}{p_X(2)}$$

$p_{X,Y}(x, y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	$1/6$	$1/6$
$x = 1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x = 2$	$1/6$	0	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/2$	$1/2$	1

	$y = 0$	$y = 1$
$p_Y(y \mid X = 0)$	0	1
$p_Y(y \mid X = 1)$	$1/2$	$1/2$
$p_Y(y \mid X = 2)$	1	0

Exemplo

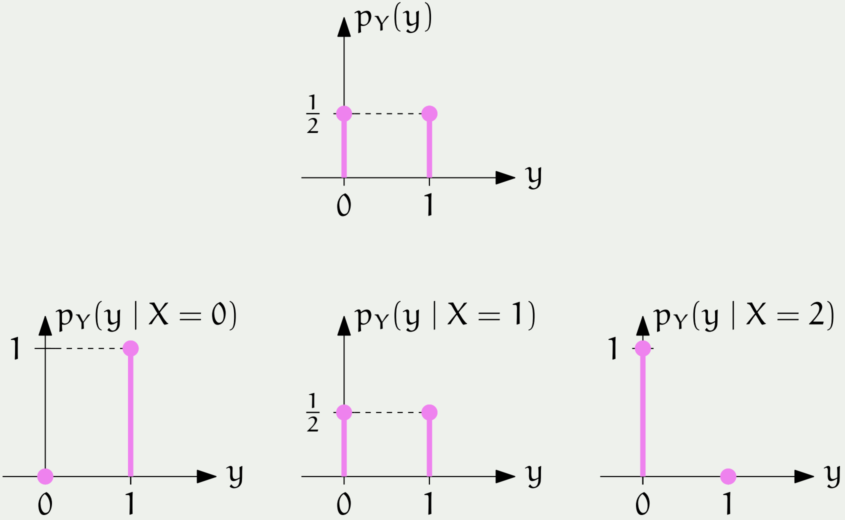
$$p_Y(y \mid X = x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$$

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=0$	0	$1/6$	$1/6$
$x=1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x=2$	$1/6$	0	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/2$	$1/2$	1

	$y=0$	$y=1$
$p_Y(y \mid X=0)$	0	1
$p_Y(y \mid X=1)$	$1/2$	$1/2$
$p_Y(y \mid X=2)$	1	0

Basta **normalizar** as linhas (ou as colunas).

Exemplo



$p_Y(y)$
$\frac{1}{2}$
y
0
1
$p_Y(y \mid X = 0)$
1
y
0
1
$p_Y(y \mid X = 1)$
$\frac{1}{2}$
y
0
1
$p_Y(y \mid X = 2)$
1
y
0
1

Caso geral

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Caso geral

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **PDF condicional** de X dado $Y = y$ é definida por

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

definida apenas se $f_Y(y) \neq 0$.

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **PDF condicional** de X dado $Y = y$ é definida por

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

definida apenas se $f_Y(y) \neq 0$.

Notações alternativas

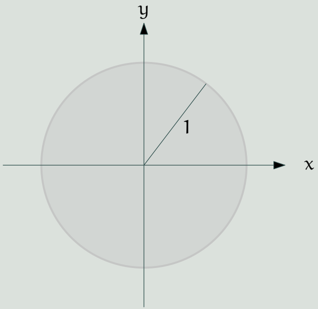
$$f_X(x \mid Y = y) \;=\; f_{X|Y=y}(x) \;=\; f_{X|Y}(x \mid y)$$

Ilustração

Corresponde a **cortes** (normalizados) na PDF conjunta.

Exemplo

Sejam X e Y duas VAs com PDF conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada abaixo.



Determine a PDF condicional de X dado $Y = y$.

Exemplo

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra**

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}[-1 \leq y \leq 1]$$

Exemplo

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra**

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}[-1 \leq y \leq 1]$$

Caso $y < -1$ ou $y > 1$:

$f_X(x \mid Y = y)$ não está definida!

Exemplo

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra**

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}[-1 \leq y \leq 1]$$

Caso $-1 \leq y \leq 1$:

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{\frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}} = \frac{[x^2 + y^2 \leq 1]}{2\sqrt{1 - y^2}}$$

Exemplo

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra**

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}[-1 \leq y \leq 1]$$

Caso $-1 \leq y \leq 1$:

$$f_X(x \mid Y = y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1 - y^2}}, & -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra**

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}[-1 \leq y \leq 1]$$

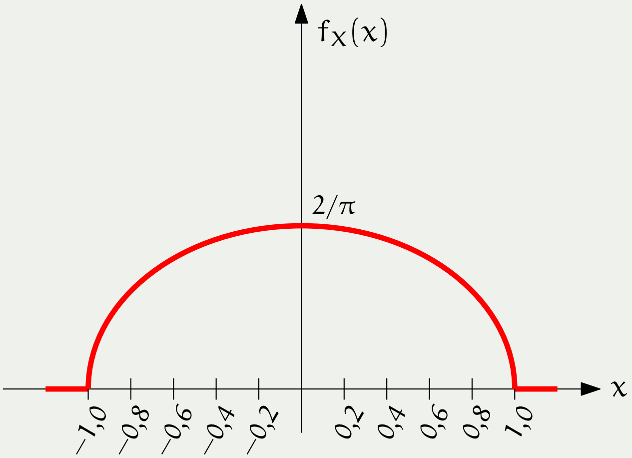
Caso $-1 \leq y \leq 1$:

$$f_X(x \mid Y = y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

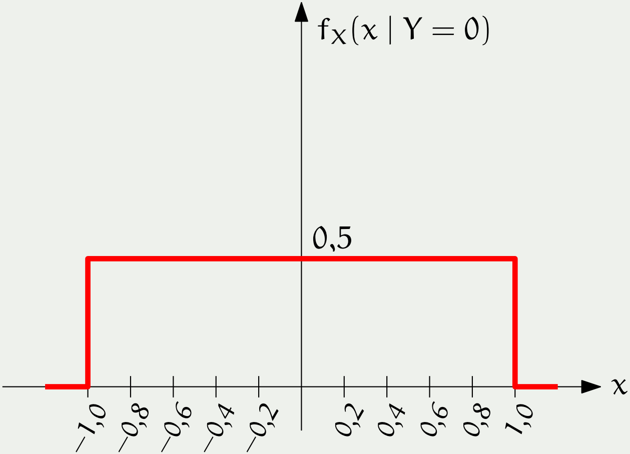
Conclusão: $(X \mid Y = y) \sim \mathrm{Uniform}([-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}])$.

Exemplo

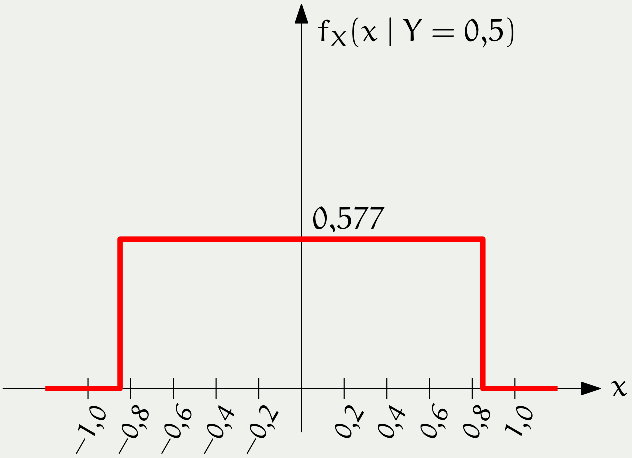
Relembrando a PDF marginal de X:



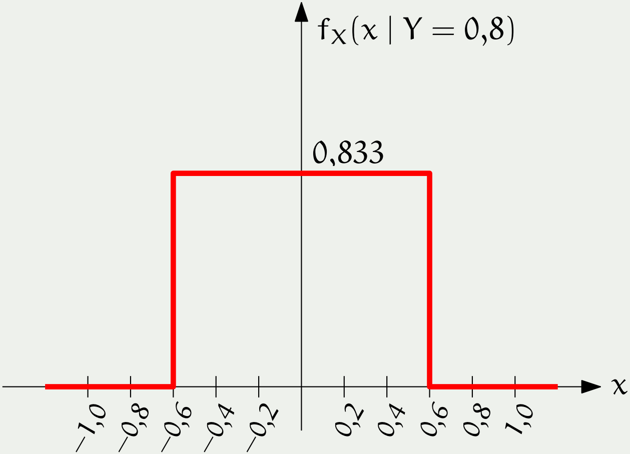
Exemplos de casos particulares:



Exemplos de casos particulares:

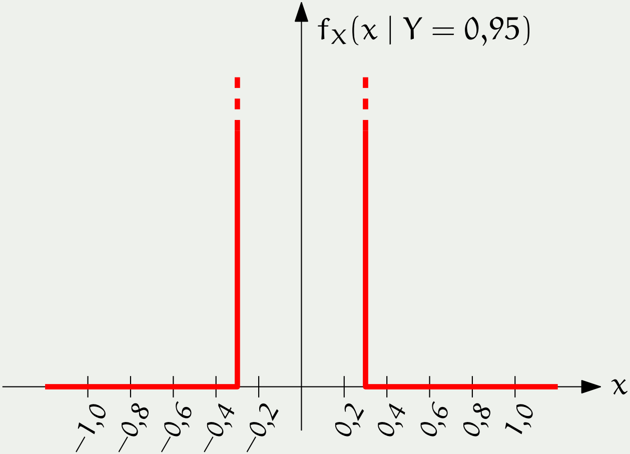


Exemplos de casos particulares:



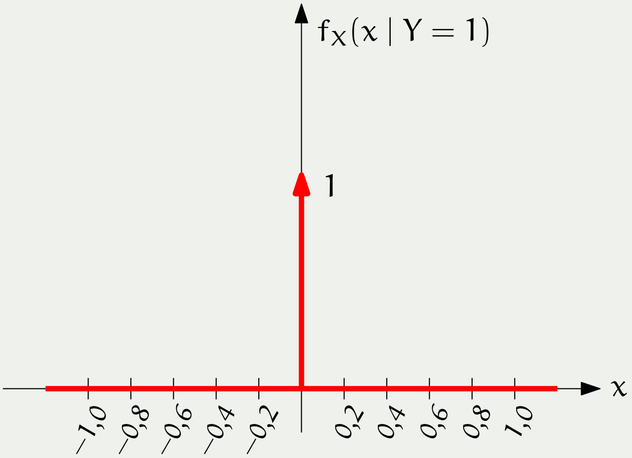
Exemplo

Exemplos de casos particulares:



Exemplo

Exemplos de casos particulares:



Proposição

Para o caso discreto:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff p_{X|Y=y} = p_X \ \ \forall y : p_Y(y) \neq 0$$

Para o caso geral:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff f_{X|Y=y} = f_X \ \ \forall y : f_Y(y) \neq 0$$

Proposição

Para o caso discreto:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff p_{X|Y=y} = p_X \quad \forall y : p_Y(y) \neq 0$$

Para o caso geral:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff f_{X|Y=y} = f_X \quad \forall y : f_Y(y) \neq 0$$

Demonstração:

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)\, f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x). \qquad \square$$

Exercícios propostos

Yates–Goodman

- 5.2.1.
- 5.2.4.
- 5.3.1.
- 5.3.4.
- 5.4.1.
- 5.4.2.
- 5.5.1, 7.5.6.
- 5.5.4, 7.5.7.
- 5.6.3.
- 5.6.7.
- 7.4.3.
- 7.4.11.

Esboce sua resposta sempre que possível.

Referências

Referências

José Paulo de Almeida Albuquerque, José Mauro Pedro Fortes, and Weiler Alves Finamore.
Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos.
Editora Interciência, 2008.

Steven M. Kay.
Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB®.
Springer, 2006.

Roy D. Yates and David J. Goodman.
Probability and Stochastic Processes.
Wiley, 3rd edition, 2014.