

Processos Estocásticos

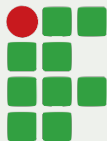
Covariância e conceitos relacionados

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



**INSTITUTO
FEDERAL**

Santa Catarina

Câmpus
São José

Valor esperado de função de duas VAs

Valor esperado de função de duas VAs

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais.

Teorema

$$E[g(X, Y)] = \sum_{x, y} g(x, y) p_{X, Y}(x, y) \quad (\text{caso discreto})$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X, Y}(x, y) dx dy \quad (\text{caso geral})$$



Valor esperado de função de duas VAs

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais.

Teorema

$$E[g(X, Y)] = \sum_{x, y} g(x, y) p_{X, Y}(x, y) \quad (\text{caso discreto})$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X, Y}(x, y) dx dy \quad (\text{caso geral})$$

Esse resultado será necessário no decorrer desta aula.



Covariância

Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.



Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **covariância** de X e Y é definida por

$$\text{cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$



Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **covariância** de X e Y é definida por

$$\text{cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$



A covariância é uma medida de **dependência linear**.



Fórmula alternativa para a covariância

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Proposição

$$\text{cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y].$$



Fórmula alternativa para a covariância

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Proposição

$$\text{cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\text{cov}[X, Y] &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= E[XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X \mu_Y] \\ &= E[XY] - E[X]\mu_Y - \mu_X E[Y] + E[\mu_X \mu_Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - \cancel{\mu_X \mu_Y} + \cancel{\mu_X \mu_Y} \\ &= E[XY] - E[X]E[Y]. \quad \square\end{aligned}$$



1 Simetria

$$\text{cov}[X, Y] = \text{cov}[Y, X].$$



1 Simetria

$$\text{cov}[X, Y] = \text{cov}[Y, X].$$

2 Covariância de uma VA com si mesma

$$\text{cov}[X, X] = \text{var}[X].$$



1 Simetria

$$\text{cov}[X, Y] = \text{cov}[Y, X].$$

2 Covariância de uma VA com si mesma

$$\text{cov}[X, X] = \text{var}[X].$$

3 Faixa de valores (desigualdade de Cauchy-Schwarz)

$$-\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]} \leq \text{cov}[X, Y] \leq \sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}.$$

Pode assumir valor negativo, positivo, ou zero.



1 Simetria

$$\text{cov}[X, Y] = \text{cov}[Y, X].$$

2 Covariância de uma VA com si mesma

$$\text{cov}[X, X] = \text{var}[X].$$

3 Faixa de valores (desigualdade de Cauchy-Schwarz)

$$-\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]} \leq \text{cov}[X, Y] \leq \sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}.$$

Pode assumir valor negativo, positivo, ou zero.

4 Variância da soma

$$\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2 \text{cov}[X, Y].$$



Coeficiente de Pearson

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

O **coeficiente de Pearson** de X e Y é definido por

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y},$$

definido apenas quando $\text{var}[X] > 0$ e $\text{var}[Y] > 0$.



Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

O **coeficiente de Pearson** de X e Y é definido por

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y},$$

definido apenas quando $\text{var}[X] > 0$ e $\text{var}[Y] > 0$.



O coeficiente de Pearson é a **covariância normalizada**. Também é uma medida da dependência linear.



1 Faixa de valores (*segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz.*)

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

Contraste com a covariância, que pode assumir qualquer valor real.



1 Faixa de valores (segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz.)

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

Contraste com a covariância, que pode assumir qualquer valor real.

2 Dependência completamente linear

$$\rho_{X,Y} = +1 \quad \iff \quad Y = aX + b, \quad \text{com } a > 0.$$

$$\rho_{X,Y} = -1 \quad \iff \quad Y = aX + b, \quad \text{com } a < 0.$$



1 Faixa de valores (segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz.)

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

Contraste com a covariância, que pode assumir qualquer valor real.

2 Dependência completamente linear

$$\rho_{X,Y} = +1 \iff Y = aX + b, \text{ com } a > 0.$$

$$\rho_{X,Y} = -1 \iff Y = aX + b, \text{ com } a < 0.$$

3 Invariância a mudanças de escala e translações

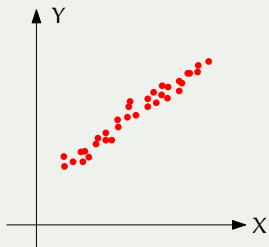
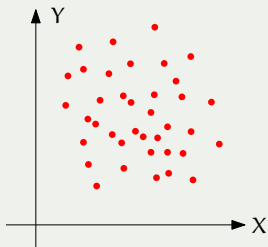
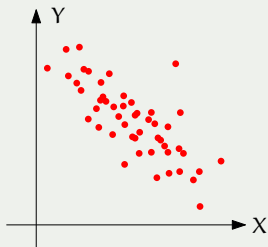
Se $X' = a_1X + b_1$ e $Y' = a_2Y + b_2$, então $\rho_{X,Y} = \rho_{X',Y'}$.



Módulo. O quanto X e Y satisfazem " $Y = aX + b$ ".



- Sinal. (+) X e Y crescem/decrescem juntos.
(-) Quando um cresce o outro decresce.

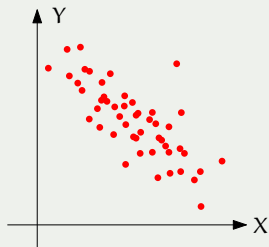


Módulo. O quanto X e Y satisfazem " $Y = aX + b$ ".

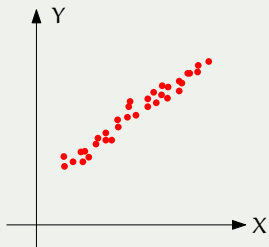
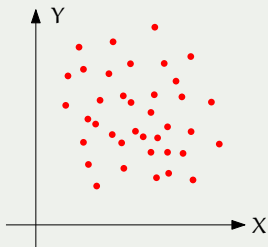


Sinal. (+) X e Y crescem/decrescem juntos.

(-) Quando um cresce o outro decresce.



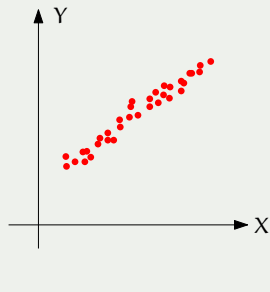
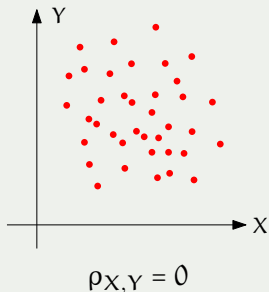
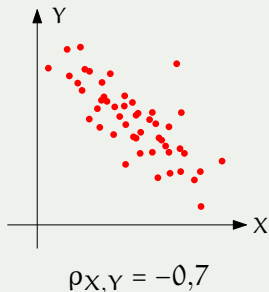
$$\rho_{X,Y} = -0,7$$



Módulo. O quanto X e Y satisfazem “ $Y = aX + b$ ”.



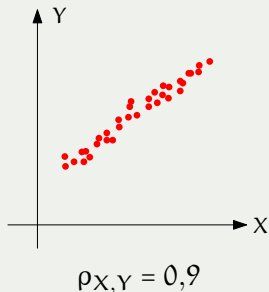
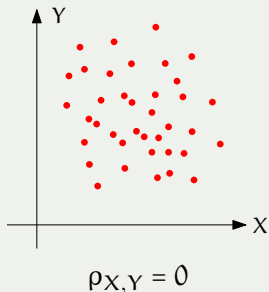
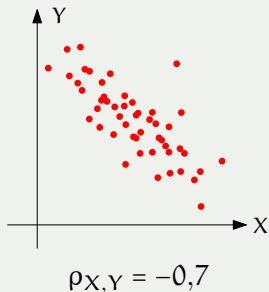
Sinal. (+) X e Y crescem/decrescem juntos.
(-) Quando um cresce o outro decresce.



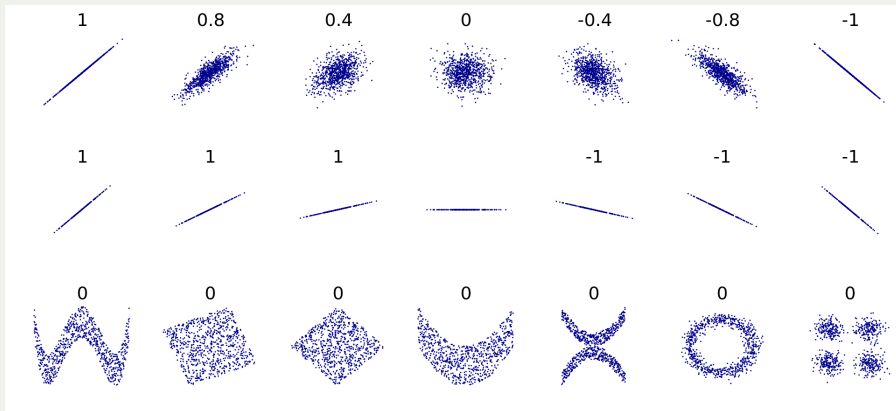
Módulo. O quanto X e Y satisfazem “ $Y = aX + b$ ”.



Sinal. (+) X e Y crescem/decrescem juntos.
(-) Quando um cresce o outro decresce.



Ilustração



Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Correlation_examples2.svg



Exemplo 1

Exemplo

Considere um dado cúbico honesto cujas seis faces estão pintadas conforme a seguir:



Considere o experimento probabilístico que consiste em rolar tal dado e depois lançar uma moeda honesta o número de vezes mostrado no dado. Sejam:

- X = resultado do dado.
- Y = número de coroas obtidas.

Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y .



Exemplo 1

D	M ₁	M ₂	M ₃	X	Y	Pr
				1	0	1/6
				1	1	1/6
				2	0	1/12
				2	1	1/12
				2	1	1/12
				2	2	1/12
				3	0	1/24
				3	1	1/24
				3	1	1/24
				3	2	1/24
				3	1	1/24
				3	2	1/24
				3	2	1/24
				3	3	1/24



Exemplo 1

$p_{X,Y}(x, y)$					
	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$p_X(x)$
$x = 1$	$1/6$	$1/6$	0	0	$1/3$
$x = 2$	$1/12$	$2/12$	$1/12$	0	$1/3$
$x = 3$	$1/24$	$3/24$	$3/24$	$1/24$	$1/3$
$p_Y(y)$	$7/24$	$11/24$	$5/24$	$1/24$	1



Exemplo 1

$p_{X,Y}(x, y)$					
	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$p_X(x)$
$x = 1$	$1/6$	$1/6$	0	0	$1/3$
$x = 2$	$1/12$	$2/12$	$1/12$	0	$1/3$
$x = 3$	$1/24$	$3/24$	$3/24$	$1/24$	$1/3$
$p_Y(y)$	$7/24$	$11/24$	$5/24$	$1/24$	1

$$E[X] = (1)\frac{1}{3} + (2)\frac{1}{3} + (3)\frac{1}{3} = 2$$

$$E[Y] = (0)\frac{7}{24} + (1)\frac{11}{24} + (2)\frac{5}{24} + (3)\frac{1}{24} = 1$$

$$E[XY] = (1)(0)\frac{1}{6} + (1)(1)\frac{1}{6} + \dots + (3)(3)\frac{1}{24} = 7/3$$



Exemplo 1

$p_{X,Y}(x, y)$					
	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$p_X(x)$
$x = 1$	$1/6$	$1/6$	0	0	$1/3$
$x = 2$	$1/12$	$2/12$	$1/12$	0	$1/3$
$x = 3$	$1/24$	$3/24$	$3/24$	$1/24$	$1/3$
$p_Y(y)$	$7/24$	$11/24$	$5/24$	$1/24$	1

$$E[X] = (1)\frac{1}{3} + (2)\frac{1}{3} + (3)\frac{1}{3} = 2$$

$$E[Y] = (0)\frac{7}{24} + (1)\frac{11}{24} + (2)\frac{5}{24} + (3)\frac{1}{24} = 1$$

$$E[XY] = (1)(0)\frac{1}{6} + (1)(1)\frac{1}{6} + \dots + (3)(3)\frac{1}{24} = 7/3$$

$$\text{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]}_{7/3} - \underbrace{E[X]}_2 \underbrace{E[Y]}_1 = 1/3$$



Exemplo 1

$p_{X,Y}(x, y)$					
	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$p_X(x)$
$x = 1$	$1/6$	$1/6$	0	0	$1/3$
$x = 2$	$1/12$	$2/12$	$1/12$	0	$1/3$
$x = 3$	$1/24$	$3/24$	$3/24$	$1/24$	$1/3$
$p_Y(y)$	$7/24$	$11/24$	$5/24$	$1/24$	1

$$E[X^2] = (1)^2 \frac{1}{3} + (2)^2 \frac{1}{3} + (3)^2 \frac{1}{3} = 14/3$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 14/3 - 2^2 = 2/3$$

$$E[Y^2] = (0)^2 \frac{7}{24} + (1)^2 \frac{11}{24} + (2)^2 \frac{5}{24} + (3)^2 \frac{1}{24} = 5/3$$

$$\text{var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = 5/3 - 1^2 = 2/3$$



Exemplo 1

$p_{X,Y}(x, y)$					
	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$p_X(x)$
$x = 1$	1/6	1/6	0	0	1/3
$x = 2$	1/12	2/12	1/12	0	1/3
$x = 3$	1/24	3/24	3/24	1/24	1/3
$p_Y(y)$	7/24	11/24	5/24	1/24	1

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}} = \frac{1/3}{\sqrt{(2/3) \cdot (2/3)}} = \frac{1}{2}$$



Exemplo

Uma régua de comprimento unitário é quebrada em um ponto aleatório. O pedaço da esquerda é novamente quebrado. Seja X a variável aleatória que define, a partir da extremidade esquerda da régua, o ponto em que a régua é quebrada pela primeira vez e Y a variável aleatória que define o segundo ponto de quebra.

- a Determine a PDF conjunta de X e Y .
- b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y .



Exemplo 2

- a Determine a PDF conjunta de X e Y .



Exemplo 2

- a) Determine a PDF conjunta de X e Y .

Temos:

$$X \sim \text{Uniform}([0, 1])$$

$$Y \mid X = x \sim \text{Uniform}([0, x])$$



Exemplo 2

- a) Determine a PDF conjunta de X e Y .

Temos:

$$\begin{aligned}X &\sim \text{Uniform}([0, 1]) \\ Y | X = x &\sim \text{Uniform}([0, x])\end{aligned}$$

Portanto:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y | X = x)$$



Exemplo 2

- a Determine a PDF conjunta de X e Y .

Temos:

$$\begin{aligned}X &\sim \text{Uniform}([0, 1]) \\ Y | X = x &\sim \text{Uniform}([0, x])\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x) f_Y(y | X = x) \\ &= 1[0 \leq x \leq 1] \cdot \frac{1}{x}[0 \leq y \leq x]\end{aligned}$$



Exemplo 2

- a) Determine a PDF conjunta de X e Y .

Temos:

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Uniform}([0, 1]) \\ Y | X = x &\sim \text{Uniform}([0, x]) \end{aligned}$$

Portanto:

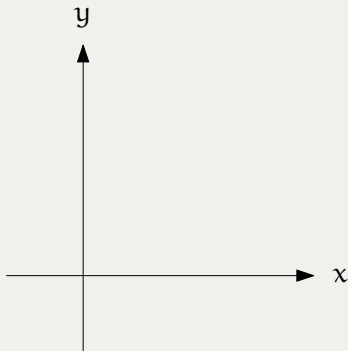
$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_X(x) f_Y(y | X = x) \\ &= 1[0 \leq x \leq 1] \cdot \frac{1}{x}[0 \leq y \leq x] \\ &= \frac{1}{x}[0 \leq y \leq x \leq 1] \end{aligned}$$



Exemplo 2

- a) Determine a PDF conjunta de X e Y.

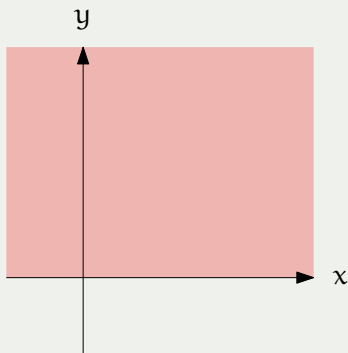
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x} [0 \leq y \leq x \leq 1]$$



Exemplo 2

- a) Determine a PDF conjunta de X e Y.

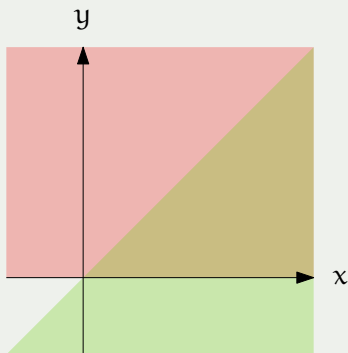
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x} [0 \leq y \leq x \leq 1]$$



Exemplo 2

- a) Determine a PDF conjunta de X e Y.

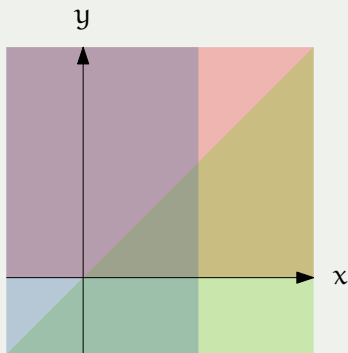
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x} [0 \leq \underbrace{y \leq x} \leq 1]$$



Exemplo 2

- a) Determine a PDF conjunta de X e Y.

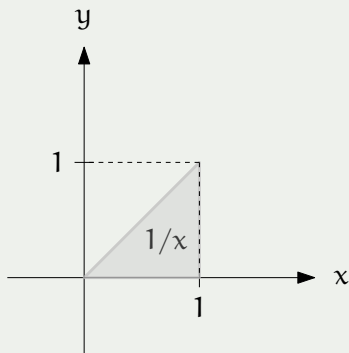
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x} [0 \leq y \leq \underline{x \leq 1}]$$



Exemplo 2

- a) Determine a PDF conjunta de X e Y.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x} [0 \leq y \leq x \leq 1]$$

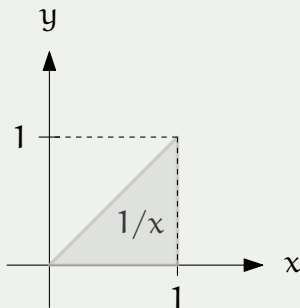


Exemplo 2

- b** Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y .

$$\text{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]} \underbrace{E[Y]}$$

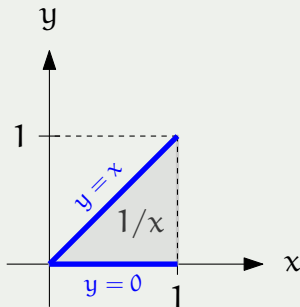
$$E[X] = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x f_{X,Y}(x, y) dy dx$$



Exemplo 2

- b** Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y .

$$\text{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]} \underbrace{E[Y]}$$



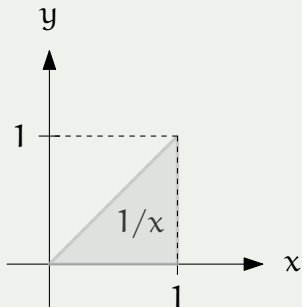
$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x \frac{1}{x} dy dx \end{aligned}$$



Exemplo 2

- b** Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y .

$$\text{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]} \underbrace{E[Y]}$$



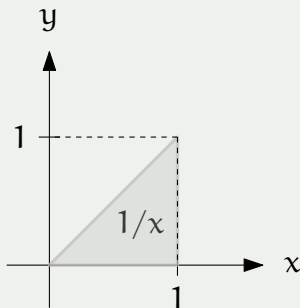
$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x \frac{1}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} 1 dy dx \end{aligned}$$



Exemplo 2

- b** Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y .

$$\text{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]} \underbrace{E[Y]}$$



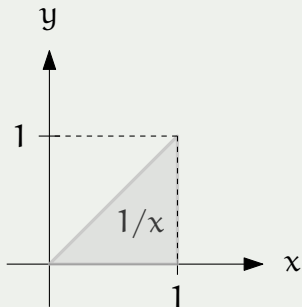
$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x \frac{1}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} 1 dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} x dx \end{aligned}$$



Exemplo 2

- b** Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y .

$$\text{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]}_{1/2} \underbrace{E[Y]}$$



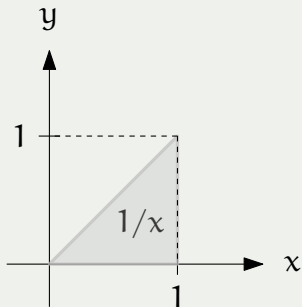
$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x \frac{1}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} 1 dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} x dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Exemplo 2

- b** Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y .

$$\text{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]}_{1/2} \underbrace{E[Y]}_{1/4}$$



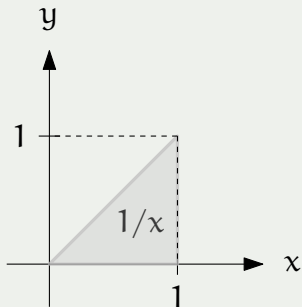
$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} y \frac{1}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} \frac{y}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Exemplo 2

- b** Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y .

$$\text{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]}_{1/6} - \underbrace{E[X]}_{1/2} \underbrace{E[Y]}_{1/4}$$



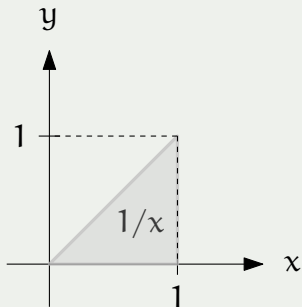
$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} xy \frac{1}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} y dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6} \end{aligned}$$



Exemplo 2

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y .

$$\text{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]}_{1/6} - \underbrace{E[X]}_{1/2} \underbrace{E[Y]}_{1/4} = \frac{1}{24}$$



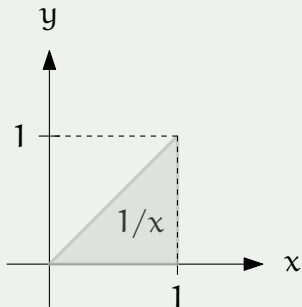
$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} xy \frac{1}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} y dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6} \end{aligned}$$



Exemplo 2

- b** Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}} = \frac{1/24}{\sqrt{(1/12) \cdot (\quad)}} =$$



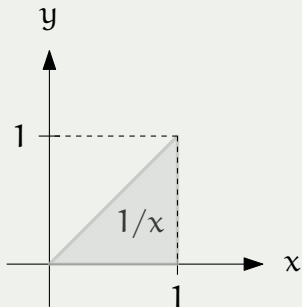
$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x^2 f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x^2 \frac{1}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} x^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



Exemplo 2

- b** Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}} = \frac{1/24}{\sqrt{(1/12) \cdot (7/144)}} =$$



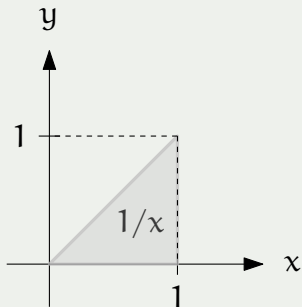
$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y^2 f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} y^2 \frac{1}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} \frac{y^2}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{9} \end{aligned}$$



Exemplo 2

- b** Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}} = \frac{1/24}{\sqrt{(1/12) \cdot (7/144)}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$



$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y^2 f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} y^2 \frac{1}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} \frac{y^2}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{9} \end{aligned}$$



Descorrelação

Descorrelação: Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Relembrando...

X e Y são **independentes** $\iff f_{X,Y} = f_X f_Y$



Descorrelação: Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Relembrando...

X e Y são **independentes** $\iff f_{X,Y} = f_X f_Y$

Definição

X e Y são **descorrelacionadas** $\iff E[XY] = E[X] E[Y]$



Descorrelação: Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Relembrando...

X e Y são **independentes** $\iff f_{X,Y} = f_X f_Y$

Definição

X e Y são **descorrelacionadas** $\iff E[XY] = E[X] E[Y]$
 $\iff \text{cov}[X, Y] = 0$



Descorrelação: Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Relembrando...

X e Y são **independentes** $\iff f_{X,Y} = f_X f_Y$

Definição

X e Y são **descorrelacionadas** $\iff E[XY] = E[X] E[Y]$
 $\iff \text{cov}[X, Y] = 0$
 $\iff \text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y]$



Proposição

X e Y independentes \implies X e Y descorrelacionadas



Proposição

X e Y independentes \implies X e Y descorrelacionadas

Demonstração: Se X e Y são independentes, então

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E[X] E[Y]. \quad \square \end{aligned}$$



Proposição

X e Y independentes \implies X e Y descorrelacionadas

...mas a recíproca é falsa!



Descorrelação não implica independência.



Contra-exemplo 1

Exemplo

Sejam X e Y duas VAs discretas conjuntamente distribuídas como abaixo.

(x, y)	$p_{X,Y}(x, y)$
$(0, +1)$	$1/4$
$(+1, 0)$	$1/4$
$(0, -1)$	$1/4$
$(-1, 0)$	$1/4$

Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.



Contra-exemplo 1

$p_{X,Y}(x, y)$				
	$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = -1$	0	1/4	0	1/4
$x = 0$	1/4	0	1/4	1/2
$x = 1$	0	1/4	0	1/4
$p_Y(y)$	1/4	1/2	1/4	1



Contra-exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$				
	$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = -1$	0	1/4	0	1/4
$x = 0$	1/4	0	1/4	1/2
$x = 1$	0	1/4	0	1/4
$p_Y(y)$	1/4	1/2	1/4	1

$$E[XY] = \sum_{x,y} xy p_{X,Y}(x,y) = (0 \cdot 1) \frac{1}{4} + (1 \cdot 0) \frac{1}{4} + (-1 \cdot 0) \frac{1}{4} + (0 \cdot -1) \frac{1}{4} = 0$$

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = (-1) \frac{1}{4} + (0) \frac{1}{2} + (1) \frac{1}{4} = 0$$

$$E[Y] = \sum_y y p_Y(y) = (-1) \frac{1}{4} + (0) \frac{1}{2} + (1) \frac{1}{4} = 0$$



Contra-exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$				
	$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = -1$	0	1/4	0	1/4
$x = 0$	1/4	0	1/4	1/2
$x = 1$	0	1/4	0	1/4
$p_Y(y)$	1/4	1/2	1/4	1

$$\underbrace{E[XY]}_0 = \underbrace{E[X]}_0 \underbrace{E[Y]}_0 \quad \therefore \quad X \text{ e } Y \text{ são descorrelacionadas}$$



Contra-exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$				
	$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = -1$	0	1/4	0	1/4
$x = 0$	1/4	0	1/4	1/2
$x = 1$	0	1/4	0	1/4
$p_Y(y)$	1/4	1/2	1/4	1

$$\underbrace{p_{X,Y}(0,0)}_0 \neq \underbrace{p_X(0)}_{1/2} \underbrace{p_Y(0)}_{1/2} \quad \therefore \quad X \text{ e } Y \text{ são dependentes}$$



Contra-exemplo 2

Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.



Contra-exemplo 2

Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $E[U^n]$:



Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $E[U^n]$:

$$E[U^n] = \int_{-\infty}^{\infty} u^n f_U(u) du$$



Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $E[U^n]$:

$$\begin{aligned} E[U^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} u^n f_U(u) du \\ &= \int_{-1}^1 u^n \frac{1}{2} du \end{aligned}$$



Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $E[U^n]$:

$$\begin{aligned} E[U^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} u^n f_U(u) du \\ &= \int_{-1}^1 u^n \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{u=-1}^{u=1} \end{aligned}$$



Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $E[U^n]$:

$$\begin{aligned} E[U^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} u^n f_U(u) du \\ &= \int_{-1}^1 u^n \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{u=-1}^{u=1} = \frac{1}{2(n+1)} [1^{n+1} - (-1)^{n+1}] \end{aligned}$$



Exemplo

Seja $U \sim \text{Uniform}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $E[U^n]$:

$$\begin{aligned} E[U^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} u^n f_U(u) du \\ &= \int_{-1}^1 u^n \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{u=-1}^{u=1} = \frac{1}{2(n+1)} [1^{n+1} - (-1)^{n+1}] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$



Contra-exemplo 2

- X e Y são descorrelacionadas:



- X e Y são descorrelacionadas:

$$E[X] = E[U^2] = \frac{1}{3}$$

$$E[Y] = E[U^3] = 0$$

$$E[XY] = E[U^2U^3] = E[U^5] = 0$$



- X e Y são descorrelacionadas:

$$E[X] = E[U^2] = \frac{1}{3}$$

$$E[Y] = E[U^3] = 0$$

$$E[XY] = E[U^2U^3] = E[U^5] = 0$$

$$\underbrace{E[XY]}_0 = \underbrace{E[X]}_{1/3} \underbrace{E[Y]}_0 \quad \therefore \quad X \text{ e } Y \text{ são descorrelacionadas}$$



Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:



Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)$... E agora?



Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)$... E agora?

Prova por **contradição**:



Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)\dots$ E agora?

Prova por **contradição**:

- 1 Hipótese: X e Y são independentes.



- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)\dots$ E agora?

Prova por **contradição**:

- 1 Hipótese: X e Y são independentes.
- 2 Então X^2 e Y^2 são independentes.



- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)$... E agora?

Prova por **contradição**:

- 1 Hipótese: X e Y são independentes.
- 2 Então X^2 e Y^2 são independentes.
- 3 Então X^2 e Y^2 são descorrelacionadas.



- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)$... E agora?

Prova por **contradição**:

- 1 Hipótese: X e Y são independentes.
- 2 Então X^2 e Y^2 são independentes.
- 3 Então X^2 e Y^2 são descorrelacionadas.
- 4 Então $E[X^2Y^2] = E[X^2]E[Y^2]$.



- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)$... E agora?

Prova por **contradição**:

- 1 Hipótese: X e Y são independentes.
- 2 Então X^2 e Y^2 são independentes.
- 3 Então X^2 e Y^2 são descorrelacionadas.
- 4 Então $E[X^2Y^2] = E[X^2]E[Y^2]$.
- 5 Então $E[u^{10}] = E[u^4]E[u^6]$.



- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)$... E agora?

Prova por **contradição**:

- 1 Hipótese: X e Y são independentes.
- 2 Então X^2 e Y^2 são independentes.
- 3 Então X^2 e Y^2 são descorrelacionadas.
- 4 Então $E[X^2Y^2] = E[X^2]E[Y^2]$.
- 5 Então $E[u^{10}] = E[u^4]E[u^6]$.
- 6 Então $\frac{1}{11} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$. **Absurdo!**



- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)$... E agora?

Prova por **contradição**:

- 1 Hipótese: X e Y são independentes.
- 2 Então X^2 e Y^2 são independentes.
- 3 Então X^2 e Y^2 são descorrelacionadas.
- 4 Então $E[X^2Y^2] = E[X^2]E[Y^2]$.
- 5 Então $E[U^{10}] = E[U^4]E[U^6]$.
- 6 Então $\frac{1}{11} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$. **Absurdo!**

Portanto, a hipótese (X e Y são independentes) é falsa.



- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)$... E agora?

Alternativamente... Para $U \sim \text{Uniform}([-1, 1])$, $X = U^2$, $Y = U^3$:

$$f_X(x | Y = y) = \delta(x - y^{2/3})$$

$$f_Y(y | X = x) = \frac{1}{2}\delta(y - x^{3/2}) + \frac{1}{2}\delta(y + x^{3/2})$$

Portanto, X e Y são dependentes.



Exercícios propostos

- 5.7.12.
- 5.7.13.
- 5.8.6.
- 5.8.7.



Esboce sua resposta sempre que possível.



Referências



JOSÉ PAULO DE ALMEIDA ALBUQUERQUE, JOSÉ MAURO PEDRO FORTES, AND WEILER ALVES FINAMORE.

PROBABILIDADE, VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.

Editora Interciência, 2008.



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.

PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.

Wiley, 3rd edition, 2014.

