Processos Estocásticos

Vetores aleatórios

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006
Engenharia de Telecomunicações

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Vetores aleatórios

Definição

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definidas no mesmo experimento probabilístico.

Então, diz-se que

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

é um **vetor aleatório** ($\vec{\mathrm{V}}$A).

Definição

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definidas no mesmo experimento probabilístico.

Então, diz-se que

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}^T$$

é um **vetor aleatório** ($\vec{\text{V}}$A).

PMF de $\vec{X}$: $\quad p_{\vec{X}}(\vec{x}) = p_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (caso discreto)

PDF de $\vec{X}$: $\quad f_{\vec{X}}(\vec{x}) = f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (caso geral)

Seja $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2 \;\; \cdots \;\; X_n]^T$ um $\vec{V}$A.

Definição

O **vetor média** de $\vec{X}$ é definido por

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \mathrm{E}[\vec{X}]$$

Vetor média e matriz covariância

Seja $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2 \;\; \cdots \;\; X_n]^T$ um $\vec{\text{V}}$A.

Definição

O **vetor média** de $\vec{X}$ é definido por

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \mathrm{E}[\vec{X}]$$

A **matriz covariância** de $\vec{X}$ é definida por

$$C_{\vec{X}} = \mathrm{E}[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T]$$

Vetor média e matriz covariância

Seja $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2 \;\; \cdots \;\; X_n]^T$ um $\vec{V}$A.

Definição

O **vetor média** de $\vec{X}$ é definido por

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = E[\vec{X}]$$

A **matriz covariância** de $\vec{X}$ é definida por

$$C_{\vec{X}} = E[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T]$$

Obs.: O valor esperado de um vetor aleatório (ou de uma matriz aleatória) é definido tomando-se o valor esperado elemento-a-elemento.

De maneira explícita:

- **Vetor média**:

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}$$

De maneira explícita:

- **Vetor média**:

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}$$

- **Matriz covariância**:

$$C_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \operatorname{var}[X_1] & \operatorname{cov}[X_1, X_2] & \cdots & \operatorname{cov}[X_1, X_n] \\ \operatorname{cov}[X_2, X_1] & \operatorname{var}[X_2] & \cdots & \operatorname{cov}[X_2, X_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}[X_n, X_1] & \operatorname{cov}[X_n, X_2] & \cdots & \operatorname{var}[X_n] \end{bmatrix}$$

Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$C_{\vec{X}}$

Vetor média e matriz covariância

Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$C_{\vec{X}} = E\left[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T\right]$$

Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$C_{\vec{X}} = E\left[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T\right]$$

$$= E\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^T\right]$$

Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$
\begin{aligned}
C_{\vec{X}} &= \mathrm{E}\left[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$
\begin{aligned}
C_{\vec{X}} &= E\left[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T\right] \\
&= E\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^T\right] \\
&= E\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right] \\
&= E\left[\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}) \\ (X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2}) \end{bmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$
\begin{aligned}
C_{\vec{X}} &= \mathrm{E}\left[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}) \\ (X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2}) \end{bmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{E}\left[(X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1})\right] & \mathrm{E}\left[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})\right] \\ \mathrm{E}\left[(X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1})\right] & \mathrm{E}\left[(X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2})\right] \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$
\begin{aligned}
C_{\vec{X}} &= \mathrm{E}\left[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}) \\ (X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2}) \end{bmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{E}[(X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1})] & \mathrm{E}[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] \\ \mathrm{E}[(X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1})] & \mathrm{E}[(X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2})] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{cov}[X_1, X_1] & \mathrm{cov}[X_1, X_2] \\ \mathrm{cov}[X_2, X_1] & \mathrm{cov}[X_2, X_2] \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Demonstração: (Para $n = 2$, por simplicidade.)

$$
\begin{aligned}
C_{\vec{X}} &= E\left[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T\right] \\
&= E\left[\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)^T\right] \\
&= E\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} \\ X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 - \mu_{X_1} & X_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right] \\
&= E\left[\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}) \\ (X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1}) & (X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2}) \end{bmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1})] & E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] \\ E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1})] & E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_2 - \mu_{X_2})] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{cov}[X_1, X_1] & \mathrm{cov}[X_1, X_2] \\ \mathrm{cov}[X_2, X_1] & \mathrm{cov}[X_2, X_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}[X_1] & \mathrm{cov}[X_1, X_2] \\ \mathrm{cov}[X_2, X_1] & \mathrm{var}[X_2] \end{bmatrix}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

Exemplo

Sejam $B_1, B_2, B_3 \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ três VAs independentes entre si e sejam

$$\begin{aligned} X_1 &= B_1 \\ X_2 &= B_1 B_2 \\ X_3 &= B_1 B_2 B_3 \end{aligned}$$

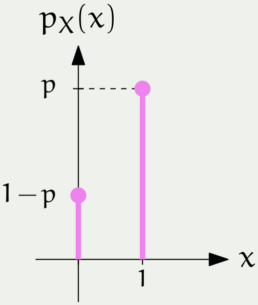
Defina os VAs $\vec{B} = [B_1 \;\; B_2 \;\; B_3]^T$ e $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2 \;\; X_3]^T$.

- a Determine a PMF de $\vec{B}$.
- b Determine o vetor média e a matriz covariância de $\vec{B}$.
- c Determine a PMF de $\vec{X}$.
- d Determine o vetor média e a matriz covariância de $\vec{X}$.

Exemplo 1

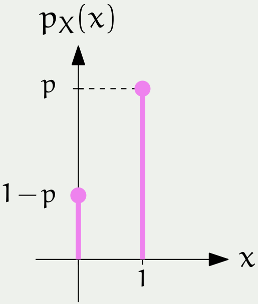
Relembrando...

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$



Relembrando...

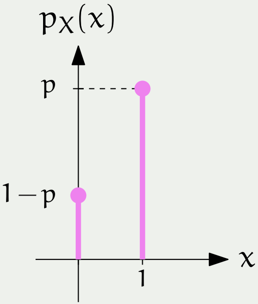
$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$



$$E[X] = (0)(1-p) + (1)p = p$$

Relembrando...

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$



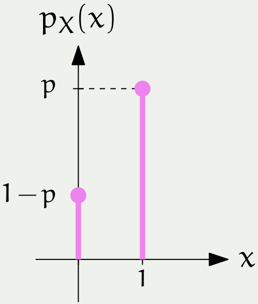
$$E[X] = (0)(1-p) + (1)p = p$$

$$E[X^2] = (0)^2(1-p) + (1)^2 p = p$$

Exemplo 1

Relembrando...

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$



$$E[X] = (0)(1-p) + (1)p = p$$

$$E[X^2] = (0)^2(1-p) + (1)^2 p = p$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

B_1, B_2, B_3 são exemplo do que chamamos de **VAs i.i.d.**:

- **i.** independentes par-a-par
- **i.d.** identicamente distribuídas: todas com a mesma distribuição

a Determine a PMF de $\vec{B}$.

B_1	B_2	B_3	Pr
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Exemplo 1

B_1, B_2, B_3 são exemplo do que chamamos de **VAs i.i.d.**:

i. independentes par-a-par

i.d. identicamente distribuídas: todas com a mesma distribuição

a Determine a PMF de $\vec{B}$.

B_1	B_2	B_3	Pr
0	0	0	1/8
0	0	1	1/8
0	1	0	1/8
0	1	1	1/8
1	0	0	1/8
1	0	1	1/8
1	1	0	1/8
1	1	1	1/8

Exemplo 1

B_1, B_2, B_3 são exemplo do que chamamos de **VAs i.i.d.**:

i. independentes par-a-par

i.d. identicamente distribuídas: todas com a mesma distribuição

a Determine a PMF de $\vec{B}$.

B_1	B_2	B_3	Pr
0	0	0	1/8
0	0	1	1/8
0	1	0	1/8
0	1	1	1/8
1	0	0	1/8
1	0	1	1/8
1	1	0	1/8
1	1	1	1/8

$\vec{b}$	$p_{\vec{B}}(\vec{b})$
$[0\ 0\ 0]^T$	1/8
$[0\ 0\ 1]^T$	1/8
$[0\ 1\ 0]^T$	1/8
$[0\ 1\ 1]^T$	1/8
$[1\ 0\ 0]^T$	1/8
$[1\ 0\ 1]^T$	1/8
$[1\ 1\ 0]^T$	1/8
$[1\ 1\ 1]^T$	1/8

Exemplo 1

b Determine o vetor média e a matriz covariância de $\vec{B}$.

b Determine o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{B}$.

Vetor média:

$$\vec{\mu}_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} E[B_1] \\ E[B_2] \\ E[B_3] \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

b Determine o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{B}$.

Vetor média:

$$\vec{\mu}_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} E[B_1] \\ E[B_2] \\ E[B_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b Determine o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{B}$.

Vetor média:

$$\vec{\mu}_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} E[B_1] \\ E[B_2] \\ E[B_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matriz covariância:

$$C_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}[B_1] & \mathrm{cov}[B_1, B_2] & \mathrm{cov}[B_1, B_3] \\ \mathrm{cov}[B_2, B_1] & \mathrm{var}[B_2] & \mathrm{cov}[B_2, B_3] \\ \mathrm{cov}[B_3, B_1] & \mathrm{cov}[B_3, B_2] & \mathrm{var}[B_3] \end{bmatrix}$$

b Determine o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{B}$.

Vetor média:

$$\vec{\mu}_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} E[B_1] \\ E[B_2] \\ E[B_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matriz covariância:

$$C_{\vec{B}} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}[B_1] & \mathrm{cov}[B_1, B_2] & \mathrm{cov}[B_1, B_3] \\ \mathrm{cov}[B_2, B_1] & \mathrm{var}[B_2] & \mathrm{cov}[B_2, B_3] \\ \mathrm{cov}[B_3, B_1] & \mathrm{cov}[B_3, B_2] & \mathrm{var}[B_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

c Determine a PMF de $\vec{X}$.

Exemplo 1

c Determine a PMF de $\vec{X}$.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= B_1 \\
X_2 &= B_1 B_2 \\
X_3 &= B_1 B_2 B_3
\end{aligned}
$$

c Determine a PMF de $\vec{X}$.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= B_1 \\
X_2 &= B_1 B_2 \\
X_3 &= B_1 B_2 B_3
\end{aligned}
$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

c Determine a PMF de $\vec{X}$.

$$X_1 = B_1$$
$$X_2 = B_1 B_2$$
$$X_3 = B_1 B_2 B_3$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0	0			
0	0	1	0			
0	1	0	0			
0	1	1	0			
1	0	0	1			
1	0	1	1			
1	1	0	1			
1	1	1	1			

Exemplo 1

c Determine a PMF de $\vec{X}$.

$$X_1 = B_1$$
$$X_2 = B_1 B_2$$
$$X_3 = B_1 B_2 B_3$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0	0	0		
0	0	1	0	0		
0	1	0	0	0		
0	1	1	0	0		
1	0	0	1	0		
1	0	1	1	0		
1	1	0	1	1		
1	1	1	1	1		

c Determine a PMF de $\vec{X}$.

$$X_1 = B_1$$
$$X_2 = B_1 B_2$$
$$X_3 = B_1 B_2 B_3$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	
0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	

Exemplo 1

c Determine a PMF de $\vec{X}$.

$$\begin{aligned} X_1 &= B_1 \\ X_2 &= B_1 B_2 \\ X_3 &= B_1 B_2 B_3 \end{aligned}$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0	0	0	0	1/8
0	0	1	0	0	0	1/8
0	1	0	0	0	0	1/8
0	1	1	0	0	0	1/8
1	0	0	1	0	0	1/8
1	0	1	1	0	0	1/8
1	1	0	1	1	0	1/8
1	1	1	1	1	1	1/8

c Determine a PMF de $\vec{X}$.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= B_1 \\
X_2 &= B_1 B_2 \\
X_3 &= B_1 B_2 B_3
\end{aligned}
$$

B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	Pr
0	0	0	0	0	0	1/8
0	0	1	0	0	0	1/8
0	1	0	0	0	0	1/8
0	1	1	0	0	0	1/8
1	0	0	1	0	0	1/8
1	0	1	1	0	0	1/8
1	1	0	1	1	0	1/8
1	1	1	1	1	1	1/8

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0\ 0\ 0]^T$	1/2
$[1\ 0\ 0]^T$	1/4
$[1\ 1\ 0]^T$	1/8
$[1\ 1\ 1]^T$	1/8

d Determine o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/2$
$[1\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/4$
$[1\ \ 1\ \ 0]^T$	$1/8$
$[1\ \ 1\ \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

d Determine o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/2$
$[1\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/4$
$[1\ \ 1\ \ 0]^T$	$1/8$
$[1\ \ 1\ \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix}$$

$$E[X_1] = (0)\tfrac{1}{2} + (1)\tfrac{1}{4} + (1)\tfrac{1}{8} + (1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2}$$
$$E[X_2] = (0)\tfrac{1}{2} + (0)\tfrac{1}{4} + (1)\tfrac{1}{8} + (1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}$$
$$E[X_3] = (0)\tfrac{1}{2} + (0)\tfrac{1}{4} + (0)\tfrac{1}{8} + (1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}$$

Exemplo 1

d Determine o **vetor média** e a matriz covariância de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/2$
$[1\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/4$
$[1\ \ 1\ \ 0]^T$	$1/8$
$[1\ \ 1\ \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$E[X_1] = (0)\tfrac{1}{2} + (1)\tfrac{1}{4} + (1)\tfrac{1}{8} + (1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2}$$

$$E[X_2] = (0)\tfrac{1}{2} + (0)\tfrac{1}{4} + (1)\tfrac{1}{8} + (1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}$$

$$E[X_3] = (0)\tfrac{1}{2} + (0)\tfrac{1}{4} + (0)\tfrac{1}{8} + (1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}$$

d Determine o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/2$
$[1\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/4$
$[1\ \ 1\ \ 0]^T$	$1/8$
$[1\ \ 1\ \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$E[X_1^2] = (0)^2\frac{1}{2} + (1)^2\frac{1}{4} + (1)^2\frac{1}{8} + (1)^2\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$E[X_2^2] = (0)^2\frac{1}{2} + (0)^2\frac{1}{4} + (1)^2\frac{1}{8} + (1)^2\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$E[X_3^2] = (0)^2\frac{1}{2} + (0)^2\frac{1}{4} + (0)^2\frac{1}{8} + (1)^2\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

d Determine o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/2$
$[1\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/4$
$[1\ \ 1\ \ 0]^T$	$1/8$
$[1\ \ 1\ \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{var}[X_1] = E[X_1^2] - E[X_1]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{var}[X_2] = E[X_2^2] - E[X_2]^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

$$\mathrm{var}[X_3] = E[X_3^2] - E[X_3]^2 = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{7}{64}$$

d Determine o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/2$
$[1\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/4$
$[1\ \ 1\ \ 0]^T$	$1/8$
$[1\ \ 1\ \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$E[X_1X_2] = (0)(0)\tfrac{1}{2} + (1)(0)\tfrac{1}{4} + (1)(1)\tfrac{1}{8} + (1)(1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}$$
$$E[X_1X_3] = (0)(0)\tfrac{1}{2} + (1)(0)\tfrac{1}{4} + (1)(0)\tfrac{1}{8} + (1)(1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}$$
$$E[X_2X_3] = (0)(0)\tfrac{1}{2} + (0)(0)\tfrac{1}{4} + (1)(0)\tfrac{1}{8} + (1)(1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}$$

d Determine o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/2$
$[1\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/4$
$[1\ \ 1\ \ 0]^T$	$1/8$
$[1\ \ 1\ \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{cov}[X_1, X_2] = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\operatorname{cov}[X_1, X_3] = E[X_1X_3] - E[X_1]E[X_3] = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16}$$

$$\operatorname{cov}[X_2, X_3] = E[X_2X_3] - E[X_2]E[X_3] = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{32}$$

d Determine o vetor média e a **matriz covariância** de $\vec{X}$.

$\vec{x}$	$p_{\vec{X}}(\vec{x})$
$[0\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/2$
$[1\ \ 0\ \ 0]^T$	$1/4$
$[1\ \ 1\ \ 0]^T$	$1/8$
$[1\ \ 1\ \ 1]^T$	$1/8$

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$C_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}[X_1] & \mathrm{cov}[X_1, X_2] & \mathrm{cov}[X_1, X_3] \\ \mathrm{cov}[X_2, X_1] & \mathrm{var}[X_2] & \mathrm{cov}[X_2, X_3] \\ \mathrm{cov}[X_3, X_1] & \mathrm{cov}[X_3, X_2] & \mathrm{var}[X_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{7}{64} \end{bmatrix}$$

Exemplo (“*order statistics*”)

Sejam $U_1, \ldots, U_n \sim \mathrm{Uniform}([0, 1])$ VAs independentes entre si. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ as variáveis $U_1, \ldots, U_n$ ordenadas em ordem crescente.

Pode-se mostrar que PDF conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ é dada por

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} c, & 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

em que $c > 0$ é uma constante. Considere $n = 3$ e seja $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2 \;\; X_3]^T$.

- a) Determine o valor da constante c.
- b) Determine as PDFs marginais.
- c) Determine o vetor média de $\vec{X}$.
- d) Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

Exemplo 2

Para simplificar a notação, defina $X = X_1$, $Y = X_2$ e $Z = X_3$.

Exemplo 2

Para simplificar a notação, defina $X = X_1$, $Y = X_2$ e $Z = X_3$.

Nesse caso, tem-se

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y,Z}(x,y,z) &= \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\
&= c\,[0 \leq x \leq y \leq z \leq 1].
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = c\,[0 \le x \le y \le z \le 1]$$

a Determine o valor da constante c.

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = c\,[0 \le x \le y \le z \le 1]$$

a Determine o valor da constante c.

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\
&= c \int_0^1 \int_0^z \int_0^y 1\, dx\, dy\, dz \\
&= c \int_0^1 \int_0^z y\, dy\, dz \\
&= c \int_0^1 \frac{z^2}{2}\, dz \\
&= c\,\frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad c = 6
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = 6\,[0 \le x \le y \le z \le 1]$$

b Determine as PDFs marginais.

Exemplo 2

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = 6\,[0 \le x \le y \le z \le 1]$$

b Determine as PDFs marginais. [Wolfram Alpha] [Alt]

Para $0 \le x \le 1$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\ dy\ dz \\ &= \int_x^1 \int_x^z 6\ dy\ dz \\ &= 3(1-x)^2 \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = 6\,[0 \le x \le y \le z \le 1]$$

b Determine as PDFs marginais. [Wolfram Alpha] [Alt]

Para $0 \le y \le 1$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z \\ &= \int_{y}^{1} \int_{0}^{y} 6\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z \\ &= 6y(1-y) \end{aligned}$$

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = 6\,[0 \le x \le y \le z \le 1]$$

b Determine as PDFs marginais. [Wolfram Alpha] [Alt]

Para $0 \le z \le 1$:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)\, dx\, dy \\ &= \int_0^z \int_0^y 6\, dx\, dy \\ &= 3z^2 \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
E[g(X,Y,Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y,z)\, \overbrace{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}^{6\,[0 \le x \le y \le z \le 1]}\, dx\, dy\, dz \\
&= 6\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}\int_{0}^{y} g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz
\end{aligned}
$$

c Determine o vetor média de $\vec{X}$. [Wolfram Alpha]

Exemplo 2

$$\begin{aligned} E[g(X,Y,Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y,z)\,\overbrace{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}^{6\,[0\le x\le y\le z\le 1]}\,dx\,dy\,dz \\ &= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \end{aligned}$$

c Determine o vetor média de $\vec{X}$. [Wolfram Alpha]

$$\begin{aligned} E[X] &= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y x\,dx\,dy\,dz &= \frac{1}{4} \\ E[Y] &= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y y\,dx\,dy\,dz &= \frac{2}{4} \\ E[Z] &= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y z\,dx\,dy\,dz &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
E[g(X,Y,Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y,z)\,\overbrace{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}^{6\,[0\le x\le y\le z\le 1]}\,dx\,dy\,dz \\
&= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz
\end{aligned}
$$

c Determine o vetor média de $\vec{X}$. [Wolfram Alpha]

Portanto,

$$
\vec{\mu}_{\vec{X}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
E[g(X,Y,Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y,z)\, \overbrace{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}^{6\,[0 \le x \le y \le z \le 1]}\, dx\, dy\, dz \\
&= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz
\end{aligned}
$$

d Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
E[g(X,Y,Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y,z)\,\overbrace{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}^{6\,[0\le x\le y\le z\le 1]}\,dx\,dy\,dz \\
&= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz
\end{aligned}
$$

d Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y x^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{10} \\
E[Y^2] &= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y y^2\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{10} \\
E[Z^2] &= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{6}{10}
\end{aligned}
$$

$$E[g(X,Y,Z)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y,z)\,\overbrace{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}^{6\,[0\le x\le y\le z\le 1]}\,dx\,dy\,dz$$
$$= 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

d Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

$$E[XY] = 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y xy\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{20}$$
$$E[XZ] = 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y xz\,dx\,dy\,dz = \frac{4}{20}$$
$$E[YZ] = 6\int_0^1\int_0^z\int_0^y yz\,dx\,dy\,dz = \frac{8}{20}$$

$$
\begin{aligned}
E[g(X,Y,Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y,z)\,\overbrace{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}^{6\,[0\leq x\leq y\leq z\leq 1]}\,dx\,dy\,dz \\
&= 6\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}\int_{0}^{y} g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz
\end{aligned}
$$

d Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

Portanto,

$$
C_{\vec{X}} = \frac{1}{80}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}
$$

Transformações lineares afins

Transformação linear afim

Relembrando da álgebra linear…

Uma **transformação linear** leva:

- um vetor de entrada $\vec{X}$, de dimensão $n \times 1$,
- em um vetor de saída $\vec{Y}$, de dimensão $m \times 1$,

e corresponde a uma multiplicação matricial.

Ou seja:

$$\vec{Y} = A\vec{X},$$

onde A é uma matriz $m \times n$.

Um pequeno relaxamento...

Uma **transformação linear afim** leva:

- um vetor de entrada $\vec{X}$, de dimensão $n \times 1$,
- em um vetor de saída $\vec{Y}$, de dimensão $m \times 1$,

e corresponde a uma multiplicação matricial **seguida de uma translação**.

Ou seja:

$$\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b},$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e $\vec{b}$ é um vetor $m \times 1$.

Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y =$$
$$\sigma_Y^2 =$$

Relembrando… (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y = a\mu_X + b$$
$$\sigma_Y^2 =$$

Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y = a\mu_X + b$$
$$\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y = a\mu_X + b$$
$$\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

Proposição

Seja $\vec{X}$ um $\vec{V}$A e seja $\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$. Então:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} =$$
$$C_{\vec{Y}} =$$

Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y = a\mu_X + b$$
$$\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

Proposição

Seja $\vec{X}$ um $\vec{V}$A e seja $\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$. Então:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b}$$
$$C_{\vec{Y}} =$$

Relembrando... (caso unidimensional)

Seja X uma VA e seja $Y = aX + b$. Então:

$$\mu_Y = a\mu_X + b$$
$$\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

Proposição

Seja $\vec{X}$ um $\vec{V}$A e seja $\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$. Então:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b}$$
$$C_{\vec{Y}} = AC_{\vec{X}}A^T$$

Demonstração:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = \mathrm{E}[\vec{Y}] = \mathrm{E}[A\vec{X} + \vec{b}] = A\,\mathrm{E}[\vec{X}] + \vec{b} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b}$$

Demonstração:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = E[\vec{Y}] = E[A\vec{X} + \vec{b}] = A\,E[\vec{X}] + \vec{b} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b}$$

$$\begin{aligned}
C_{\vec{Y}} &= E[(\vec{Y} - \vec{\mu}_{\vec{Y}})(\vec{Y} - \vec{\mu}_{\vec{Y}})^T] \\
&= E[(A\vec{X} + \cancel{\vec{b}} - A\vec{\mu}_{\vec{X}} - \cancel{\vec{b}})(A\vec{X} + \cancel{\vec{b}} - A\vec{\mu}_{\vec{X}} - \cancel{\vec{b}})^T] \\
&= E[(A\vec{X} - A\vec{\mu}_{\vec{X}})(A\vec{X} - A\vec{\mu}_{\vec{X}})^T] \\
&= E[(A(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}}))(A(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}}))^T] \\
&= E[A(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T A^T] \\
&= A\,E[(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})(\vec{X} - \vec{\mu}_{\vec{X}})^T]A^T \\
&= AC_{\vec{X}}A^T. \quad \square
\end{aligned}$$

Exemplo

Sejam U e V duas VAs, ambas de média -1 e variância 2, com coeficiente de Pearson $\rho_{U,V} = 1/2$. Sejam

$$X = U + 2V - 3,$$
$$Y = V - U.$$

Calcule as médias de X e de Y, as variâncias de X e de Y, e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

Exemplo

Sejam U e V duas VAs, ambas de média -1 e variância 2, com coeficiente de Pearson $\rho_{U,V} = 1/2$. Sejam

$$X = U + 2V - 3,$$
$$Y = V - U.$$

Calcule as médias de X e de Y, as variâncias de X e de Y, e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

Serão apresentadas duas soluções.

Exemplo

Sejam U e V duas VAs, ambas de média -1 e variância 2, com coeficiente de Pearson $\rho_{U,V} = 1/2$. Sejam

$$X = U + 2V - 3,$$
$$Y = V - U.$$

Calcule as médias de X e de Y, as variâncias de X e de Y, e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

Serão apresentadas duas soluções. Parte comum:

$$\mathrm{cov}[U, V] = \rho_{U,V}\sqrt{\mathrm{var}[U]\,\mathrm{var}[V]} = (1/2)\sqrt{2 \cdot 2} = 1$$

Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2\,E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$
$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2\,E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$
$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de X:

$$E[X^2] = E[(U + 2V - 3)^2] = E[U^2 + 4V^2 + 4UV - 6U - 12V + 9]$$

Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2\,E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$
$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de X:

$$E[X^2] = E[(U + 2V - 3)^2] = E[U^2 + 4V^2 + 4UV - 6U - 12V + 9]$$
$$= \underbrace{E[U^2]} + 4\underbrace{E[V^2]} + 4\underbrace{E[UV]} - 6\underbrace{E[U]}_{-1} - 12\underbrace{E[V]}_{-1} + \underbrace{E[9]}_{9}$$

Exemplo

Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2\,E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$
$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de X:

$$E[X^2] = E[(U + 2V - 3)^2] = E[U^2 + 4V^2 + 4UV - 6U - 12V + 9]$$
$$= \underbrace{E[U^2]} + 4\,\underbrace{E[V^2]} + 4\,\underbrace{E[UV]} - 6\,\underbrace{E[U]}_{-1} - 12\,\underbrace{E[V]}_{-1} + \underbrace{E[9]}_{9}$$

$$E[U^2] = \operatorname{var}[U] + E[U]^2 = 2 + (-1)^2 = 3$$
$$E[V^2] = \operatorname{var}[V] + E[V]^2 = 2 + (-1)^2 = 3$$
$$E[UV] = \operatorname{cov}[U, V] + E[U]\,E[V] = 1 + (-1)(-1) = 2$$

Exemplo

Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2\,E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$
$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de X:

$$E[X^2] = E[(U + 2V - 3)^2] = E[U^2 + 4V^2 + 4UV - 6U - 12V + 9]$$
$$= \underbrace{E[U^2]}_{3} + 4\underbrace{E[V^2]}_{3} + 4\underbrace{E[UV]}_{2} - 6\underbrace{E[U]}_{-1} - 12\underbrace{E[V]}_{-1} + \underbrace{E[9]}_{9} = 50$$

$$E[U^2] = \mathrm{var}[U] + E[U]^2 = 2 + (-1)^2 = 3$$
$$E[V^2] = \mathrm{var}[V] + E[V]^2 = 2 + (-1)^2 = 3$$
$$E[UV] = \mathrm{cov}[U, V] + E[U]\,E[V] = 1 + (-1)(-1) = 2$$

Exemplo

Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2\,E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$
$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de X:

$$E[X^2] = E[(U + 2V - 3)^2] = E[U^2 + 4V^2 + 4UV - 6U - 12V + 9]$$
$$= \underbrace{E[U^2]}_{3} + 4\,\underbrace{E[V^2]}_{3} + 4\,\underbrace{E[UV]}_{2} - 6\,\underbrace{E[U]}_{-1} - 12\,\underbrace{E[V]}_{-1} + \underbrace{E[9]}_{9} = 50$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 50 - (-6)^2 = 14$$

Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2\,E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$
$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Variância de Y:

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= E[(V-U)^2] = E[U^2 + V^2 - 2UV] \\ &= \underbrace{E[U^2]}_{3} + \underbrace{E[V^2]}_{3} - 2\,\underbrace{E[UV]}_{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\mathrm{var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = 2 - (0)^2 = 2$$

Solução direta:

Médias:

$$E[X] = E[U + 2V - 3] = E[U] + 2\,E[V] - 3 = (-1) + 2(-1) - 3 = -6$$
$$E[Y] = E[V - U] = E[V] - E[U] = (-1) - (-1) = 0$$

Covariância entre X e Y:

$$E[XY] = E[(U + 2V - 3)(V - U)] = E[-U^2 + 2V^2 - UV - 3U - 3V]$$
$$= -\underbrace{E[U^2]}_{3} + 2\underbrace{E[V^2]}_{3} - \underbrace{E[UV]}_{2} + 3\underbrace{E[U]}_{-1} - 3\underbrace{E[V]}_{-1} = 1$$

$$\mathrm{cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]\,E[Y] = 1 - (-6)(0) = 1$$

Solução matricial:

$$\begin{cases} X = U + 2V - 3 \\ Y = V - U \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{\vec{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Exemplo

Solução matricial:

$$\begin{cases} X = U + 2V - 3 \\ Y = V - U \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{\vec{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Exemplo

Solução matricial:

$$\begin{cases} X = U + 2V - 3 \\ Y = V - U \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{\vec{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Solução matricial:

$$\begin{cases} X = U + 2V - 3 \\ Y = V - U \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{\vec{U}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Portanto:

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = A\vec{\mu}_{\vec{U}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução matricial:

$$\begin{cases} X = U + 2V - 3 \\ Y = V - U \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{\vec{U}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Portanto:

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = A\vec{\mu}_{\vec{U}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$C_{\vec{X}} = AC_{\vec{U}}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Sumário:

$$\mu_X = -6 \qquad \mu_Y = 0$$

$$\operatorname{var}[X] = 14 \qquad \operatorname{var}[Y] = 2 \qquad \operatorname{cov}[X, Y] = 1$$

Finalmente (parte comum às duas soluções):

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}[X, Y]}{\sqrt{\operatorname{var}[X]\operatorname{var}[Y]}} = \frac{1}{\sqrt{(14)(2)}} = \frac{1}{\sqrt{28}}$$

Exercícios propostos

Yates–Goodman

- 8.1.2.
- 8.1.3.
- 8.4.1.
- 8.4.2.
- 8.4.4.*
- 8.4.5.

*Desconsidere a matriz correlação.

Esboce sua resposta sempre que possível.

Referências

Referências

José Paulo de Almeida Albuquerque, José Mauro Pedro Fortes, and Weiler Alves Finamore.
***Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*.**
Editora Interciência, 2008.

Roy D. Yates and David J. Goodman.
***Probability and Stochastic Processes*.**
Wiley, 3rd edition, 2014.