

Processos Estocásticos

Vetores aleatórios gaussianos

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE129006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



**INSTITUTO
FEDERAL**

Santa Catarina

Câmpus
São José

Revisão: Variável aleatória gaussiana

Definição (revisão)

Uma variável aleatória X é dita ser **gaussiana** se



Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)



Definição (revisão)

Uma variável aleatória X é dita ser **gaussiana** se

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

onde:

- $\mu = \mu_X = E[X]$ é a média
- $\sigma^2 = \sigma_X^2 = \text{var}[X]$ é a variância



Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)



Definição (revisão)

Uma variável aleatória X é dita ser **gaussiana** se

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

onde:

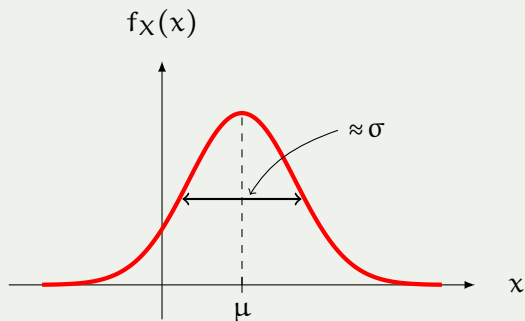
- $\mu = \mu_X = E[X]$ é a média
- $\sigma^2 = \sigma_X^2 = \text{var}[X]$ é a variância


Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)



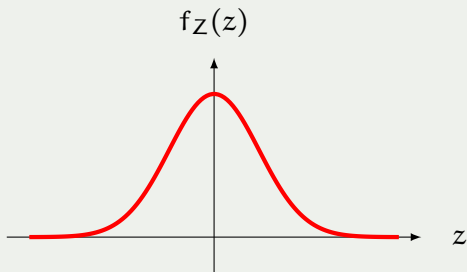


Demonstração interativa: [Site docente](#) 



Definição

A variável aleatória $Z \sim N(0, 1)$ é chamada de **gaussiana padrão**.

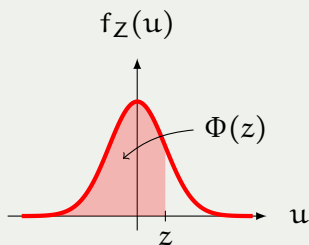


$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$



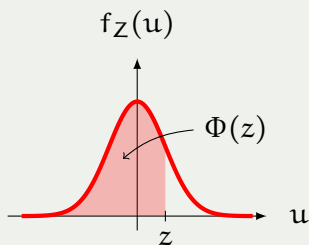
A CDF da VA gaussiana padrão é dada por

$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \int_{-\infty}^z f_Z(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du =$$



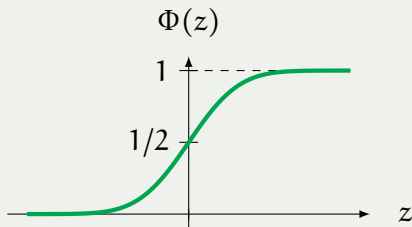
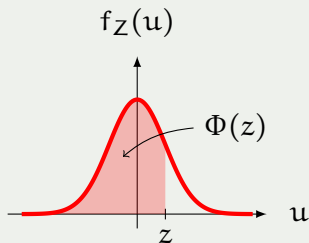
A CDF da VA gaussiana padrão é dada por

$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \int_{-\infty}^z f_Z(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du \triangleq \Phi(z)$$



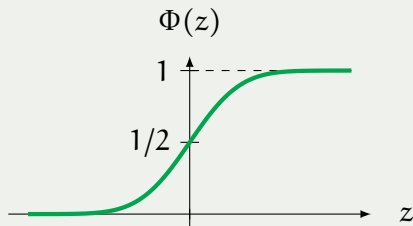
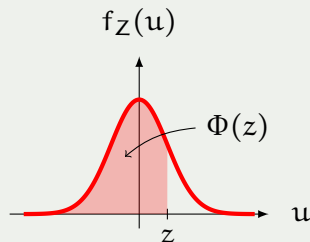
A CDF da VA gaussiana padrão é dada por

$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \int_{-\infty}^z f_Z(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du \triangleq \Phi(z)$$



A CDF da VA gaussiana padrão é dada por

$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \int_{-\infty}^z f_Z(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du \triangleq \Phi(z)$$



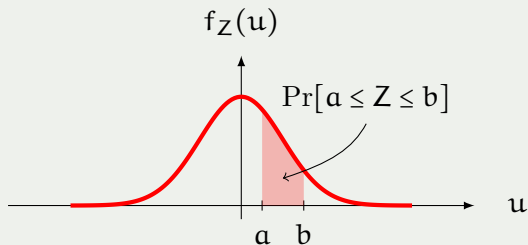
Obs: Define-se também a função $Q(z) = 1 - \Phi(z)$, bastante utilizada em sistemas de comunicação digital.



Probabilidade de um intervalo

Para a gaussiana padrão, $Z \sim N(0, 1)$:

$$\Pr[a \leq Z \leq b] = \Phi(b) - \Phi(a)$$



Probabilidade de um intervalo

No caso geral, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, aplica-se o mapeamento $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$:

$$\Pr[a \leq X \leq b] = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$



No caso geral, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, aplica-se o mapeamento $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$:

$$\Pr[a \leq X \leq b] = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Demonstração: Exercício.



Exemplo

Seja $X \sim N(5, 16)$.

- a Determine a PDF de X .
- b Determine $\Pr[7 \leq X \leq 12]$.



$$X \sim N(5, 16)$$

- a Determine a PDF de X .



$$X \sim N(5, 16)$$

a Determine a PDF de X .

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4^2}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2 \cdot 4^2}} \end{aligned}$$



$$X \sim N(5, 16)$$

b Determine $\Pr[7 \leq X \leq 12]$.



$$X \sim N(5, 16)$$


b Determine $\Pr[7 \leq X \leq 12]$.


$$\begin{aligned}\Pr[7 \leq X \leq 12] &= \Phi\left(\frac{12-5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{7-5}{4}\right) \\ &= \Phi(7/4) - \Phi(1/2) \\ &= 0,9599 - 0,6915 \\ &= 0,2685\end{aligned}$$

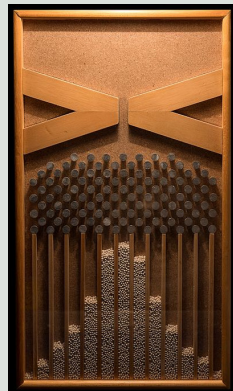


Teorema

Sob certas hipóteses, o somatório de n variáveis aleatórias independentes converge para uma gaussiana, para n suficientemente grande.

Statistics of rolling dice: [Academo](#) 

Galton board: [YouTube](#) 



Galton board



Definição: Vetor aleatório gaussiano

Definição

Um vetor aleatório é dito ser **gaussiano** se toda combinação linear de seus elementos for uma variável aleatória gaussiana. Ou seja:

$$\vec{X} = [X_1 \ \cdots \ X_n]^T \text{ é um } \vec{VA} \text{ gaussiano} \iff \\ \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n \text{ é uma VA gaussiana, } \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$



Definição

Um vetor aleatório é dito ser **gaussiano** se toda combinação linear de seus elementos for uma variável aleatória gaussiana. Ou seja:

$$\vec{X} = [X_1 \ \dots \ X_n]^T \text{ é um } \vec{VA} \text{ gaussiano} \iff \\ \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n \text{ é uma VA gaussiana, } \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

As seguintes nomenclaturas são todas equivalentes:

- $\vec{X} = [X_1 \ \dots \ X_n]^T$ é um **\vec{VA} gaussiano**.



Definição

Um vetor aleatório é dito ser **gaussiano** se toda combinação linear de seus elementos for uma variável aleatória gaussiana. Ou seja:

$$\vec{X} = [X_1 \ \dots \ X_n]^T \text{ é um } \vec{V}A \text{ gaussiano} \iff \\ \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n \text{ é uma } VA \text{ gaussiana, } \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

As seguintes nomenclaturas são todas equivalentes:

- $\vec{X} = [X_1 \ \dots \ X_n]^T$ é um **$\vec{V}A$ gaussiano**.
- X_1, \dots, X_n são **VAs conjuntamente gaussianas**.



Definição

Um vetor aleatório é dito ser **gaussiano** se toda combinação linear de seus elementos for uma variável aleatória gaussiana. Ou seja:

$$\vec{X} = [X_1 \ \dots \ X_n]^T \text{ é um } \vec{V}A \text{ gaussiano} \iff \\ a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \text{ é uma VA gaussiana, } \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

As seguintes nomenclaturas são todas equivalentes:

- $\vec{X} = [X_1 \ \dots \ X_n]^T$ é um **$\vec{V}A$ gaussiano**.
- X_1, \dots, X_n são **VAs conjuntamente gaussianas**.
- X_1, \dots, X_n são distribuídas de acordo com a **distribuição gaussiana multidimensional**.



Atenção!

X_1, X_2, \dots, X_n conjuntamente gaussianas \implies

X_1 gaussiana $\wedge X_2$ gaussiana $\wedge \dots \wedge X_n$ gaussiana

...mas a recíproca é falsa!



Exemplo

Sejam $X \sim N(0, 1)$ e $B \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$ independentes. Seja

$$Y = \begin{cases} +X, & B = 0, \\ -X, & B = 1. \end{cases}$$

- a** Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.
- b** Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.



Exemplo

Sejam $X \sim N(0, 1)$ e $B \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ independentes. Seja

$$Y = \begin{cases} +X, & B = 0, \\ -X, & B = 1. \end{cases}$$

- a** Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.
- b** Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Intuição:

X	0.44	-0.83	-0.36	-0.97	-1.17	0.35	-0.22	1.05	-1.07	-0.72	-0.76	-0.62	-0.86	-0.47	0.87	-0.69	0.16	-0.67
B	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Y	0.44	-0.83	0.36	0.97	-1.17	-0.35	0.22	1.05	1.07	-0.72	0.76	-0.62	-0.86	-0.47	-0.87	-0.69	0.16	-0.67



a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois
- Y é gaussiana, pois



- a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.
 - X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
 - Y é gaussiana, pois



a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$f_Y(y) = \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)} \underbrace{\Pr[B = 0]} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)} \underbrace{\Pr[B = 1]}$$



a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$f_Y(y) = \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$



a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$f_Y(y) = \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$



a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$f_Y(y) = \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$



a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$



a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

Obs: X e Y são identicamente distribuídas. São independentes?



- b** Mostre que X e Y *não são conjuntamente gaussianas*.



- b** Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.



- b** Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Por exemplo, $W = X + Y$:



- b** Mostre que X e Y não são conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Por exemplo, $W = X + Y$:

$$W = \begin{cases} 2X, & B = 0, \\ 0, & B = 1. \end{cases}$$

X	0.44	-0.83	-0.36	-0.97	-1.17	0.35	-0.22	1.05	-1.07	-0.72	-0.76	-0.62	-0.86	-0.47	0.87	-0.69	0.16	-0.67
B	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Y	0.44	-0.83	0.36	0.97	-1.17	-0.35	0.22	1.05	1.07	-0.72	0.76	-0.62	-0.86	-0.47	-0.87	-0.69	0.16	-0.67
W	0.88	-1.66	0	0	-2.34	0	0	2.10	0	-1.44	0	-1.24	-1.72	-0.94	0	-1.38	0.32	1.34



b Mostre que X e Y não são conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Por exemplo, $W = X + Y$:

$$W = \begin{cases} 2X, & B = 0, \\ 0, & B = 1. \end{cases}$$

$$f_W(w) = \underbrace{f_W(w | B = 0)}_{\frac{1}{2}} \Pr[B = 0] + \underbrace{f_W(w | B = 1)}_{\frac{1}{2}} \Pr[B = 1]$$



b Mostre que X e Y não são conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Por exemplo, $W = X + Y$:

$$W = \begin{cases} 2X, & B = 0, \\ 0, & B = 1. \end{cases}$$

$$f_W(w) = \underbrace{f_W(w \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4}} e^{-\frac{w^2}{2 \cdot 4}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_W(w \mid B = 1)}_{0} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$



b Mostre que X e Y não são conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Por exemplo, $W = X + Y$:

$$W = \begin{cases} 2X, & B = 0, \\ 0, & B = 1. \end{cases}$$

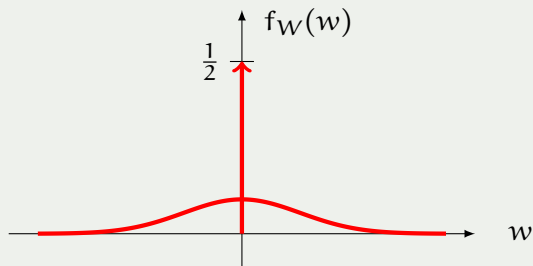
$$f_W(w) = \underbrace{f_W(w | B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4}} e^{-\frac{w^2}{2 \cdot 4}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_W(w | B = 1)}_{\delta(w)} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$



b Mostre que X e Y *não são conjuntamente gaussianas*.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

$$f_W(w) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4}} e^{-\frac{w^2}{2 \cdot 4}} + \frac{1}{2} \delta(w)$$



- 1 Um $\vec{V}A$ gaussiano \vec{X} é completamente especificado por seu vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \vec{\mu}$ e sua matriz covariância $C_{\vec{X}} = C$.

Notação: $\vec{X} \sim \vec{N}(\vec{\mu}, C)$.



- 1 Um $\vec{V}A$ gaussiano \vec{X} é completamente especificado por seu vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \vec{\mu}$ e sua matriz covariância $C_{\vec{X}} = C$.

Notação: $\vec{X} \sim \vec{N}(\vec{\mu}, C)$.

- 2 **Transformação linear afim.** (Segue da própria definição.)

$$\vec{X} \sim \vec{N} \implies A\vec{X} + \vec{b} \sim \vec{N}$$



- 1 Um $\vec{V}A$ gaussiano \vec{X} é completamente especificado por seu vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \vec{\mu}$ e sua matriz covariância $C_{\vec{X}} = C$.

Notação: $\vec{X} \sim \vec{N}(\vec{\mu}, C)$.

- 2 **Transformação linear afim.** (Segue da própria definição.)

$$\vec{X} \sim \vec{N} \implies A\vec{X} + \vec{b} \sim \vec{N}$$

- 3 **Condicionamento.** (Não será demonstrado.)

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{X}_a \\ \vec{X}_b \end{bmatrix} \sim \vec{N} \implies \vec{X}_a | \vec{X}_b \sim \vec{N}$$



- 1 Um $\vec{V}A$ gaussiano \vec{X} é completamente especificado por seu vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \vec{\mu}$ e sua matriz covariância $C_{\vec{X}} = C$.

Notação: $\vec{X} \sim \vec{N}(\vec{\mu}, C)$.

- 2 **Transformação linear afim.** (Segue da própria definição.)

$$\vec{X} \sim \vec{N} \implies A\vec{X} + \vec{b} \sim \vec{N}$$

- 3 **Condicionamento.** (Não será demonstrado.)

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{X}_a \\ \vec{X}_b \end{bmatrix} \sim \vec{N} \implies \vec{X}_a | \vec{X}_b \sim \vec{N}$$

- 4 **Independência** \iff **descorrelação.** (Demonstração mais adiante.)



Distribuição multidimensional

Teorema

Seja $\vec{X} \sim \vec{N}(\vec{\mu}, C)$, com $\det C \neq 0$. A PDF de \vec{X} é dada por

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T C^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})\right).$$

Observação. Para o caso $n = 1$, tem-se:

$$\vec{X} = [X] \quad \vec{\mu} = [\mu] \quad C = [\sigma^2] \quad \det C = \sigma^2 \quad C^{-1} = [1/\sigma^2]$$

Portanto, recai-se na fórmula já conhecida:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^1 (\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}[x - \mu] \left[\frac{1}{\sigma^2}\right] [x - \mu]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Demonstração: Independência \iff Descorrelação

Relembrando...

Para VAs X_1, \dots, X_n quaisquer:

$$X_1, \dots, X_n \text{ independentes} \implies X_1, \dots, X_n \text{ descorrelacionadas}$$



Proposição

Para VAs X_1, \dots, X_n conjuntamente gaussianas:

X_1, \dots, X_n independentes $\iff X_1, \dots, X_n$ descorrelacionadas



Proposição

Para VAs X_1, \dots, X_n conjuntamente gaussianas:

$$X_1, \dots, X_n \text{ independentes} \iff X_1, \dots, X_n \text{ descorrelacionadas}$$

Demonstração: (Para $n = 2$ e médias nulas, por simplicidade.)

Sejam X e Y duas VAs conjuntamente gaussianas de média zero.

Se X e Y são descorrelacionadas, então $\text{cov}[X, Y] = 0$, de modo que

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \bar{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \right).$$



Temos:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_X^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_Y^2 \end{bmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(\sigma_X^2\sigma_Y^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_X^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_Y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_X^2)(2\pi\sigma_Y^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2} \right]\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right) \\ &= f_X(x) f_Y(y). \quad \square \end{aligned}$$



Exemplo

Seja $\vec{X} = [X \ Y \ Z]^T$ um $\vec{V}A$ gaussiano de média nula e matriz covariância

$$C_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

- a** Determine a PDF de \vec{X} .
- b** Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W .
- c** Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.
- d** Determine $\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3]$.



Exemplo

- a Determine a PDF de \vec{X} .



a Determine a PDF de \vec{X} .

$$\vec{X} \sim \vec{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right).$$

Fórmula da gaussiana multidimensional:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^T C^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}) \right).$$

Temos:

$$\det C = 36 \quad e \quad C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



- a Determine a PDF de \vec{X} .

Fórmula da gaussiana multidimensional:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T C^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})\right).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f_{\vec{X}}(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3(36)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3(36)}} e^{-\frac{1}{12}[5x^2+3y^2+z^2-6xy]} \end{aligned}$$



Exemplo

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W .



Exemplo

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W .

W é gaussiana. [Por quê?]

Portanto, basta determinar média e variância.



Exemplo

- b** Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W .

Podemos escrever:

$$\underbrace{[W]}_{\vec{w}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} + \underbrace{[5]}_{\vec{b}}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\vec{\mu}_{\vec{w}} &= A\vec{\mu}_{\vec{x}} + \vec{b} \\ C_{\vec{w}} &= AC_{\vec{x}}A^T\end{aligned}$$



- b** Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W .

Vetor média de $\vec{W} = [W]$:

$$\vec{\mu}_{\vec{W}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \downarrow$$



- b** Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W .

Vetor média de $\vec{W} = [W]$:

$$\vec{\mu}_{\vec{W}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \downarrow \mu_W$$



- b** Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W .

Vetor média de $\vec{W} = [W]$:

$$\vec{\mu}_{\vec{W}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

\downarrow
 μ_W

Matriz covariância de $\vec{W} = [W]$:

$$C_{\vec{W}} = AC_{\vec{X}}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \end{bmatrix}$$

\downarrow



- b** Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W .

Vetor média de $\vec{W} = [W]$:

$$\vec{\mu}_{\vec{W}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

\downarrow
 μ_W

Matriz covariância de $\vec{W} = [W]$:

$$C_{\vec{W}} = AC_{\vec{X}}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \end{bmatrix}$$

\downarrow
 σ_W^2



Exemplo

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W .

Conclusão: $W \sim N(5, 41)$.



Exemplo

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W .

Conclusão: $W \sim N(5, 41)$.

Portanto:

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)41}} e^{-\frac{(w-5)^2}{2 \cdot 41}}$$



- c Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.



- c** Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Temos:

$$f_X(x | Y = 1) = \frac{f_{X,Y}(x, 1)}{f_Y(1)}$$



- c** Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Temos:

$$f_X(x | Y = 1) = \frac{f_{X,Y}(x, 1)}{f_Y(1)}$$

Numerador:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \vec{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, 1) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(6)}} \exp \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(6)}} \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{5x^2 - 6x + 3}{6} \right) \end{aligned}$$



- c** Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Temos:

$$f_X(x | Y = 1) = \frac{f_{X,Y}(x, 1)}{f_Y(1)}$$

Denominador:

$$Y \sim N(0, 5)$$

$$f_Y(1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)$$



c Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Temos:

$$f_X(x | Y = 1) = \frac{f_{X,Y}(x, 1)}{f_Y(1)}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f_X(x | Y = 1) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(6)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{5x^2 - 6x + 3}{6}\right)}{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)(5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{25x^2 - 30x + 9}{30}\right) \end{aligned}$$



- c** Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Finalmente:

$$\begin{aligned} f_X(x | Y = 1) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{25x^2 - 30x + 9}{30}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 3/5)^2}{6/5}\right) \end{aligned}$$



- c** Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Finalmente:

$$\begin{aligned} f_X(x | Y = 1) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{25x^2 - 30x + 9}{30}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 3/5)^2}{6/5}\right) \end{aligned}$$

Conclusão: $X | Y = 1 \sim N\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$



- c** Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Finalmente:

$$\begin{aligned} f_X(x | Y = 1) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{25x^2 - 30x + 9}{30}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 3/5)^2}{6/5}\right) \end{aligned}$$

Conclusão: $X | Y = 1 \sim N\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$

Lembrando: $X \sim N(0, 3)$



Exemplo

d Determine $\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3]$.



d Determine $\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3]$.

Temos:

$$\text{cov}[X, Z] = 0 \stackrel{\text{(conj. gauss.)}}{\implies} X, Z \text{ independentes}$$



d Determine $\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3]$.

Temos:

$$\text{cov}[X, Z] = 0 \quad \xRightarrow{\text{(conj. gauss.)}} \quad X, Z \text{ independentes}$$

Portanto:

$$\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3] = \Pr[0 \leq X \leq 1]$$



d Determine $\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3]$.

Temos:

$$\text{cov}[X, Z] = 0 \quad \xrightarrow{\text{(conj. gauss.)}} \quad X, Z \text{ independentes}$$

Portanto:

$$\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3] = \Pr[0 \leq X \leq 1]$$

Lembrando que $X \sim N(0, 3)$, temos:

$$\Pr[0 \leq X \leq 1] = \Phi\left(\frac{1-0}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{0-0}{\sqrt{3}}\right) = 0,2181$$



Exercícios propostos

■ 4.6.1.

■ 4.6.6.

■ 5.9.1.

■ 5.9.5.

■ 8.5.1.*

■ 8.5.2.

■ 8.5.3.*

■ 8.5.7.

*Desconsidere a matriz correlação.



Esboce sua resposta sempre que possível.



Referências



JOSÉ PAULO DE ALMEIDA ALBUQUERQUE, JOSÉ MAURO PEDRO FORTES, AND WEILER ALVES FINAMORE.

PROBABILIDADE, VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.

Editora Interciência, 2008.



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.

PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.

Wiley, 3rd edition, 2014.

