



Teoria da Informação e Codificação

Engenharia de Telecomunicações

Professor: Roberto Wanderley da Nóbrega

Semestre: 2026.2

Lista de exercícios 1

1. Calcule a entropia, em bits, de cada uma das variáveis aleatórias descritas a seguir.

(a) O tipo sanguíneo X de um brasileiro escolhido ao acaso, cuja pmf é dada pela tabela abaixo.

x	O+	A+	B+	AB+	O-	A-	B-	AB-
$p(x)$	36%	34%	8%	2.5%	9%	8%	2%	0.5%

(b) O mês X do aniversário de uma pessoa escolhida ao acaso, supondo que a data de aniversário é uniformemente distribuída sobre os 365 dias de um ano não-bissexto e levando em conta que os meses não têm todos a mesma duração. Compare o resultado com $\log_2 12$ e explique por que a diferença é tão pequena.

(c) O resultado X de um sorteio da Mega-Sena, suposto uniformemente distribuído. Compare com o número de bits gasto pela representação ingênua que codifica cada um dos seis números separadamente (6 bits por número — por quê?).

2. Seja $X \sim N(0, 1)$ a entrada de um quantizador escalar, uniforme, simétrico, do tipo mid-tread, com $L = 3$ níveis e passo $\Delta > 0$. Seja Y a saída do quantizador.

(a) Determine a pmf de Y em função de Δ .

(b) Obtenha a entropia de Y , em bits, em função de Δ . Esboce.

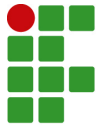
(c) Qual valor de Δ maximiza a entropia de Y ?

3. Para cada conjunto de comprimentos de palavra-código abaixo, determine se existe um código livre-de-prefixo. Em caso afirmativo, construa um; em caso negativo, explique por que não existe.

(a) 1, 1, 2, 2.

(b) 1, 2, 3, 3.

(c) 2, 2, 3, 3, 4.



4. Considere uma DMS $X = (\mathcal{X}, p)$, com $\mathcal{X} = \{a, b\}$ e $p = [0.9, 0.1]$. Expresse entropias e taxas em bits.

- (a) Calcule $H(X)$.
- (b) Para $k = 2$ e $k = 3$, determine a extensão de k -ésima ordem da fonte e calcule $H(X^{(k)})$ pela definição, sem recorrer à identidade $H(X^{(k)}) = kH(X)$.
- (c) O teorema da codificação de fonte de Shannon garante que o comprimento médio do código símbolo-a-símbolo ótimo C^* de uma DMS Y satisfaz

$$\bar{\ell}(C^*, Y) < H(Y) + 1.$$

Aplicando esse resultado a $Y = X^{(k)}$, determine a menor ordem k que garante a existência de um código livre-de-prefixo de taxa não superior a 0.5 bits/letra.

- (d) (*Opcional.*) Gallager [1] refinou esse limitante: para uma DMS Y cujo símbolo mais provável tem probabilidade $p_{\max}(Y)$,

$$\bar{\ell}(C^*, Y) \leq H(Y) + p_{\max}(Y) + \sigma,$$

onde $\sigma = 1 - \log_2 e + \log_2 \log_2 e \approx 0.086$. Aplicando esse resultado a $Y = X^{(k)}$, repita o item anterior.

- (e) A extensão de ordem $k = 4$ admite código ótimo de taxa 0.49255 bits/letra. Compare essa ordem com a obtida em (c) — e com a de (d), caso tenha resolvido o item — e comente.

5. Determine o código de Huffman para a fonte do exercício anterior, considerando:

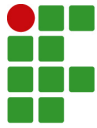
- (a) A fonte original ($k = 1$).
- (b) A extensão de segunda ordem ($k = 2$).
- (c) A extensão de terceira ordem ($k = 3$).

Qual a taxa de cada codificador, em bits/letra? Compare com a entropia da fonte.

6. [2, 9.11] Considere a DMS abaixo.

Letra	a	i	l	m	n	o	p	y
Prob.	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1

Determine dois códigos de Huffman diferentes para esta fonte: (a) movendo um símbolo combinado o mais para cima possível e (b) movendo um símbolo combinado o mais para baixo possível. Em seguida, determine a média e a variância do comprimento de cada código.



7. (Opcional.) Utilize o código de Lempel–Ziv 77 para codificar a mensagem

`x = os_ossos_dos_colossos.`

Considere alfabeto de entrada $\mathcal{X} = \{_, a, b, c, \dots, z\}$ e janela com search buffer de tamanho $S = 16$ e lookahead buffer de tamanho $L = 8$. Compare os tamanhos da representação não-codificada com a codificada.

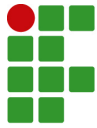
8. Mais por vir. *Stay tuned!*

Bibliografia

- [1] R. G. Gallager, “Variations on a Theme by Huffman”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 24, n. 6, p. 668–674, nov. 1978.
- [2] S. Haykin, *Communication Systems*, 4^o ed. John Wiley & Sons, 2001.

Respostas

- 1. (a) $H(X) = 2.240$ bit.
(b) $H(X) = 3.584$ bit.
(c) $H(X) = 25.58$ bit.
- 2. (a) $p_Y(y) = [q, 1 - 2q, q]$, onde $q = Q(\Delta/2)$.
(b) $H(Y) = \mathcal{H}(2q) + 2q$ (em bits).
(c) $\Delta^* = 2Q^{-1}(1/3) \approx 0.8615$, com $H(Y) = \log 3 = 1.585$ bit.
- 3. (a) Não existe.
(b) $C = [\emptyset, 10, 110, 111]$.
(c) $C = [00, 01, 100, 101, 1100]$.
- 4. (a) $H(X) = 0.469$ bits/letra.
(b) $\mathcal{X}^2 = \{00, 01, 10, 11\}$ e $p^{(2)} = [0.81, 0.09, 0.09, 0.01]$.
 $\mathcal{X}^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ e $p^{(3)} = [0.729, 0.081, 0.081, 0.009, 0.081, 0.009, 0.009, 0.001]$.
 $H(X^{(2)}) = 0.938$ bits/superletra e $H(X^{(3)}) = 1.407$ bits/superletra.
(c) $k = 33$.
(d) $k = 12$.
(e) —
- 5. (a) $C = \{a : 0, b : 1\}$, com $\bar{\ell} = 1$ bit/letra.
(b) $C = \{aa : 0, ab : 11, ba : 100, bb : 101\}$, com $\bar{\ell} = 0.645$ bits/letra.



(c) $C = \{aaa : 0, aab : 100, aba : 101, abb : 11101, baa : 110, bab : 11110, bba : 11100, bbb : 11111\}$,
com $\bar{\ell} = 0.5326$ bits/letra.

6. (a) $C = \{a : 010, i : 011, l : 000, m : 100, n : 101, o : 001, p : 110, y : 111\}$,
com $\bar{\ell} = 3$ bits/letra e variância 0.

(b) $C = \{a : 110, i : 111, l : 01, m : 100, n : 101, o : 000, p : 0010, y : 0011\}$,
com $\bar{\ell} = 3$ bits/letra e variância 0.4.

7. Tokens: (15, 0, o), (15, 0, s), (13, 3, s), (10, 3, d), (12, 3, c), (12, 1, l), (3, 4, s).

$y = 111100001111 \ 111100010011 \ 110101110011 \ 101001100100 \ 110001100011 \ 110000101100 \ 001110010011.$

Não-codificado: 105 bits. Codificado: 84 bits.