Teoria da Informação e Codificação
Engenharia de Telecomunicações

Professor: Roberto Wanderley da Nóbrega — Semestre: 2026.2

Lista de exercícios 4

1. Considere o código convolucional com matrizes geradoras dadas por

$$G_0 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(a) Determine n, k, μe o número de estados do codificador.
(b) Determine os elementos de v_1 em termos dos elementos de u_i, u_{i-1} e u_{i-2}.
(c) Esboce o diagrama de blocos correspondente.
(d) Esboce o diagrama de estados.
(e) Codifique a sequência de informação $u = 1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,\ldots$, usando o diagrama de estados. Confirme o resultado usando as expressões do item (b).

2. *(Opcional.)* Considere o código convolucional (3, 2, 1) visto em aula, com matrizes geradoras

$$G_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad e \quad G_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(a) Quantos estados tem o codificador?
(b) Esboce o diagrama de estados. Como agora entram dois bits por vez, rotule cada ramo no formato $u_i|v_i$ (entrada/saída), em vez de usar linha cheia e linha tracejada.
(c) Use o diagrama de estados para codificar a sequência de informação $u = 1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,\ldots$ e compare com o resultado obtido em aula.

3. *(Opcional.)* Considere novamente o código convolucional com matrizes geradoras dadas por

$$G_0 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(a) Determine a matriz geradora polinomial $G(D)$.
(b) Codifique a sequência de informação $u = 1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,\ldots$ calculando $v(D) = u(D)G(D)$. Compare com o resultado do item (e) do Exercício 1.
(c) Mostre que

$$v(D)\begin{bmatrix}D\\ 1\end{bmatrix} = u(D)$$

para todo $u(D)$. Em seguida, verifique a equação acima para o caso do item (b). Por fim, escreva a equação no domínio do tempo e explique como ela permite realizar a codificação inversa (isto é, recuperar a sequência de informação a partir da sequência-código, na ausência de erros).

4. *(Opcional.)* Considere o código convolucional com matriz geradora polinomial

$$G(D) = \begin{bmatrix}1+D & D & 1\\ D^2 & 1 & 1+D+D^2\end{bmatrix}.$$

O *comprimento de restrição* da entrada i, denotado por ν_i, é o maior grau entre os polinômios da linha i de $G(D)$.

(a) Determine n, k, μ, ν_0 e ν_1.
(b) Determine as matrizes geradoras G_0, G_1 e G_2. Em seguida, determine os elementos de v_i em termos dos elementos de u_i, u_{i-1} e u_{i-2}.
(c) Esboce o diagrama de blocos correspondente. Quantos blocos de atraso são necessários para cada entrada? Determine o grau σ e o número de estados do codificador. Compare o número de estados com $2^{k\sigma}$.
(d) Mostre que $\mu = \max_i \nu_i$ para qualquer $G(D)$. Mostre também que, se o diagrama de blocos for construído como visto em aula, então $\sigma = \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_{k-1}$. Em que caso vale $\sigma = k\mu$?

5. Considere novamente o código convolucional com matrizes geradoras dadas por

$$G_0 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Suponha que sejam codificados $h = 4$ blocos de informação e que a mensagem seja $u = \mathbf{1\,0\,0\,1}$.

(a) Considere terminação por truncamento direto. Determine o comprimento n', a dimensão k' e a taxa R' do código de bloco resultante. Em seguida, codifique a mensagem e indique em que estado o codificador termina.
(b) Repita o item anterior para terminação no estado zero.
(c) *(Opcional.)* Considere terminação por tail-biting. Determine em que estado o codificador deve iniciar, justificando. Em seguida, determine n', $k' e R'$, codifique a mensagem e verifique que o codificador termina no estado inicial.
(d) Para terminação no estado zero, determine o menor valor de h para o qual $R' \geq 0{,}9R$, em que R é a taxa do código convolucional.

6. Considere novamente o código convolucional com matrizes geradoras dadas por

$$G_0 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

com terminação no estado zero e $h = 4$ blocos de informação.

(a) Esboce a treliça correspondente.
(b) Determine a palavra-código $\hat{v}$ e a mensagem $\hat{u}$ decodificadas pelo algoritmo de Viterbi, supondo a palavra recebida $b = \mathbf{111\,101\,001\,000\,101\,000}$. Determine também $d_{\text{livre}}(b, \hat{v})$.

7. *(Opcional.)* Considere novamente o código convolucional com matrizes geradoras dadas por

$$G_0 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

com terminação no estado zero e $h = 4$ blocos de informação. Após a transmissão em BPSK (com mapeamento $0 \mapsto -1$ e $1 \mapsto +1$) por um canal AWGN com $N_0 = 2$, recebe-se

$$\begin{aligned} r = [&+1{,}0, +2{,}0, \quad +0{,}5, -0{,}5, +2{,}0, \quad -0{,}5, -1{,}5, +1{,}0,\\ &-1{,}5, -2{,}0, -1{,}0, \quad +0{,}5, -1{,}0, +0{,}5, \quad -1{,}0, -1{,}5, -0{,}5]. \end{aligned}$$

(a) Calcule o valor L de cada bit recebido e obtenha b a partir do sinal de cada L. Verifique que $b \neq \hat{v}$, palavra decodificada no Exercício 6.
(b) Utilize o algoritmo de Viterbi adaptado para SDD para determinar $\hat{v} \in \hat{u}$. Use como métrica de ramo a soma dos $|L|$ dos bits em que v_i discorda de b_i.
(c) Ainda com a métrica do item anterior, calcule a métrica total da palavra-código decodificada no Exercício 6. Calcule também a distância de Hamming entre b e a palavra-código decodificada no item (b). Por que os dois decodificadores discordam?
(d) Sabendo que a mensagem transmitida foi $u = \mathbf{1\,0\,0\,0}$, quantas inversões de bit ocorreram no canal? Quantos bits de informação cada decodificador errou?

8. Considere novamente o código convolucional com matrizes geradoras dadas por

$$G_0 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(a) Esboce o diagrama de estados modificado, rotulando cada ramo com $E^{\alpha_{\text{ent}}} N^{\alpha_{\text{saída}}}$.
(b) Escreva as equações de estado e resolva o sistema para determinar a função enumeradora de caminhos $A(E, N)$.
(c) Determine $A(V) = B(V)$, na forma fechada e expandidas até o termo em V^{10}. Determine também a distância livre d_{livre}.
(d) Liste os caminhos (sequência de estados e ramos) correspondentes aos termos de $A(V)$ com peso de saída até 10. Confira os valores de A_{10} e B_{10} obtidos no item anterior.
(e) Suponha SDD no AWGN com $\text{BPSK} + E_s/N_0 = 6$ dB, entre P_b usando três termos do limitante da união. Compare com a transmissão sem codificação.
(f) Determine o ganho de codificação assintótico. Sem codificação, qual seria o E_b/N_0 necessário para atingir o P_b do item anterior? Compare o ganho efetivo com o assintótico.
(g) Compare com o código $(2, 1, 2)$ visto em aula, que tem $d_{\text{livre}} = 5$ e, em $E_s/N_0 = 6$ dB, $P_b \approx 6.89 \times 10^{-8}$ (três termos). Qual dos dois códigos tem melhor desempenho? O código $(3, 1, 2)$ tem distância livre maior; isso é uma contradição? Explique.
(h) Considere agora o código $(3, 1, 2)$ com matriz geradora polinomial

$$G(D) = \begin{bmatrix}1 + D^2 & 1 + D + D^2 & 1 + D + D^2\end{bmatrix}.$$

Determine $A(V)$, d_{livre} e o ganho de codificação assintótico. Compare com os dois códigos anteriores.

9. *(Opcional.)* Considere novamente o código convolucional com matrizes geradoras dadas por

$$G_0 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

com terminação por tail-biting e $h = 4$ blocos de informação.

(a) Uma forma alternativa de codificar com tail-biting é a seguinte: tome a palavra-código obtida com terminação no estado zero para a mesma mensagem, some (módulo-2) seus dois últimos blocos aos dois primeiros e descarte os dois últimos. Verifique esta afirmação com a mensagem do Exercício 5 e explique por que ela funciona.
(b) Codifique as mensagens $u = \mathbf{1\,0\,0\,0}$ e $u = \mathbf{0\,0\,0\,1}$ usando truncamento direto e usando tail-biting. Compare os pesos de Hamming das quatro palavras-código obtidas. O que acontece com a proteção dos últimos bits da mensagem em cada caso?
(c) Por que o algoritmo de Viterbi, como visto em aula, não pode ser aplicado diretamente na decodificação? Quantas vezes seria necessário executá-lo para realizar a decodificação ótima?

10. *(Opcional.)* Considere novamente o código convolucional com matrizes geradoras dadas por

$$G_0 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad G_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

com $h = 4$ blocos de informação. Para qualquer uma das três técnicas de terminação, o código de bloco resultante é linear e, portanto, tem uma matriz geradora G', de tamanho $k' \times n'$, tal que $v = uG'$.

(a) Determine G' para cada técnica de terminação. Em seguida, codifique a mensagem $u = \mathbf{1\,0\,0\,1}$ calculando $v = uG'$ e compare com o resultado do Exercício 5.
(b) Seja $u(D)$ a representação polinomial da mensagem, que tem grau menor que h. Mostre que a representação polinomial da palavra-código é dada por:
- $v(D) = u(D)G(D)$ na terminação no estado zero;
- $v(D) = u(D)G(D) \bmod D^h$ no truncamento direto;
- $v(D) = u(D)G(D) \bmod (D^h + 1)$ no tail-biting.

Verifique com a mensagem $u = \mathbf{1\,0\,0\,1}$.
(c) Determine a distância mínima do código de bloco resultante para cada uma das três técnicas de terminação. Compare os resultados. *Sugestão:* Use um computador.

Respostas

1. (a) $(n, k, \mu) = (3, 1, 2)$. Número de estados: 4.
(b) $v_0^{(i)} = u_i + u_{i-1}^{(i)} + u_{i-2}^{(i)}$,
$v_1^{(i)} = u_i + u_{i-1}^{(i)} + u_{i-2}^{(i)}$,
$v_2^{(i)} = u_i^{(i)} + u_{i-1}^{(i)} + u_{i-2}^{(i)}$.
(c) —
(d) —
(e) $v = \mathbf{111\,100\,110\,010\,011\,101}\,000\,000\,000\ldots$

2. (a) Número de estados: 4.
(b) —
(c) $v = \mathbf{110\,000\,001\,111}\,000\,000\ldots$

3. (a) $G(D) = [1 + D^2 \quad 1 + D \quad 1 + D + D^2]$.
(b) $u(D) = [1 + D + D^2]$, $v(D) = [1 + D + D^2 \quad 1 + D^2 + D^3 \quad 1 + D^2 + D^3]$.
(c) No domínio do tempo, $\mathbf{u}_0^{(0)} = u_{i-1}^{(1)} + u_i^{(2)}$: a sequência de informação é recuperada a partir da sequência-código com um atraso de atraso e um somador módulo-2, sem atraso de decodificação.

4. (a) $n = 3$, $k = 2$, $\mu = 2$, $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 2$.
(b) $G_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $G_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $G_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.
$v_0^{(i)} = u_i^{(1)} + u_{i-1}^{(1)}$,
$v_1^{(i)} = u_i^{(1)} + u_{i-1}^{(1)} + u_{i-2}^{(2)}$,
$v_2^{(i)} = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_{i-1}^{(1)} + u_{i-2}^{(2)}$.
(c) Um bloco de atraso para a entrada $u^{(1)}$ e dois para a entrada $u^{(2)}$. Logo, $\sigma = \nu_0 + \nu_1 = 3$, e o codificador tem $2^\sigma = 8$ estados, e não $2^{k\sigma} = 16$.
(d) —

5. (a) $(n', k') = (12, 4)$, $R' = 1/3 = 1\text{/}\mathbf{11\,011\,101\,111}$. Estado final: **16**.
(b) $(n', k') = (18, 4)$, $R' = 2/9 = 1\text{/}\mathbf{11\,011\,101\,111\,011\,101}$. Estado final: **00**.
(c) $(n', k') = (12, 4)$, $R' = 1/3 = \mathbf{100\,110\,001\,111}$. Estado inicial e final: **01**.
(d) $h = \mathbf{18}$.

6. (a) —
(b) $\hat{v} = \mathbf{111\,100\,001\,110\,101\,000}$ e $\hat{u} = \mathbf{1\,1\,1\,0}$, com $d_H(b, \hat{v}) = 3$.

7. (a) Como $N_0 = 2$, tem-se $L = 4r/N_0 = 2r$:

r	0	1	2	3	4	5
$L_i^{(1)}$	$+3.0$	$+1.0$	-1.0	-3.0	$+1.0$	-2.0
$L_i^{(2)}$	$+2.0$	-1.0	-3.0	$+4.0$	-2.0	-2.0
$L_i^{(3)}$	$+4.0$	$+4.0$	$+2.0$	-2.0	$+1.0$	-1.0

Logo, $b = \mathbf{111\,101\,001\,000\,101\,000}$, a mesma palavra recebida do Exercício 6.
(b) $\hat{v} = \mathbf{111\,011\,101\,000\,000\,000}$ e $\hat{u} = \mathbf{1\,0\,0\,0}$, com métrica final 5.
(c) Exercício 6: Métrica 11 e distância 3. Item (b): Métrica 5 e distância 5.
(d) Ocorreram 5 inversões de bits no canal, todas em bits com $|L| = 1$. HDD: erros 2 bits de informação ($\hat{u} = \mathbf{1\,1\,1\,0}$); SDD: não erros nenhum.

8. (a) —
(b) Equações de estado:

$$\begin{aligned} X_{00} &= U^{1,0} + UVX_{00} \\ X_{01} &= V^2X_{00} + UVX_{01} \\ X_{11} &= UVX_{10} + UVX_{11} \\ A(U,V) &= V^2X_{01}. \end{aligned}$$

Função enumeradora de caminhos:

$$A(U,V) = \frac{UV^2}{1 - UV - UV^2} = UV^2 + UV^3 + UV^4 + (U^2 + U^3)V^{5+} + \cdots$$

(c) Distribuições de pesos:

$$A(V) = \frac{V^2}{1 - V - V^2} = V^2 + V^3 + 2V^4 + 3V^5 + \cdots,$$

$$B(V) = \frac{V^7}{(1 - V - V^2)^2} = V^7 + 2V^8 + 3V^9 + 4V^{10} + \cdots$$

Distância livre: $d_{\text{livre}} = 7$.
(d) Peso 7: **00 → 10 → 01 → 00**, entrada **1 0 0**.
Peso 8: **00 → 10 → 11 → 01 → 00**, entrada **1 1 0 0**.
Peso 9: **00 → 10 → 11 → 11 → 01 → 00**, entrada **1 1 1 0 0**.
Peso 10: **00 → 10 → 11 → 11 → 11 → 01 → 00**, entrada **1 1 1 1 0 0**.
Peso 10: **00 → 10 → 11 → 01 → 10 → 01 → 00**, entrada **1 0 1 0 0**.
Logo, $A_{10} = 2 = B_{10} = 4 + 2 = 6$.
(e) $P_b \approx 1.38 \times 10^{-5}$. (Com todos os termos: 1.51×10^{-5}.) Sem codificação, $P_b \approx 2.39 \times 10^{-6}$, cerca de 170 vezes maior.
(f) $\text{ACG} = 10\log_{10}(7/3) = 3.68$ dB. Sem codificação, entre $P_b/N_0 = 9.44$ dB e ganho efetivo é de 3.44 dB, um pouco abaixo do assintótico.
(g) O código $(2, 1, 2)$ é melhor: em 6 dB, seu P_b é cerca de metade do obtido no item (e), e seu ACG é de 3.98 dB, contra 3.68 dB. Para atingir o mesmo P_b o código $(3, 1, 2)$ precisaria de $E_b/N_0 \approx 6.28$ dB.
(h) Resolvendo as equações de estado:

$$A(V) = \frac{V^6(2 - 3V)}{1 - 2V^2 + V^3} = 2V^6 + 3V^{7+} + 13V^{+8} + \cdots$$

Logo, $d_{\text{livre}} = 6$, atingida pelas entradas $1\,0\,0 + 1\,1\,0\,0$. $\text{ACG} = 10\log_{10}(6/3) = 4.26$ dB, o maior dos três.

9. (a) —
(b) Truncamento direto: **111 011 101 000** (peso **7**) e **000 000 000 111** (peso **3**).
Tail-biting: **111 011 101 000** (peso **7**) e **011 101 000 111** (peso **7**).
(c) O decodificador não conhece o estado inicial, que depende da mensagem. A decodificação ótima executa o algoritmo uma vez para cada estado inicial possível (exigindo estado final igual ao inicial) e escolhe o resultado de menor métrica: 4 execuções.

10. (a) Estado zero:

$$G' = \begin{bmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_0 & G_1 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_0 & G_1 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_0 & G_1 & G_2 \end{bmatrix}, \quad v = \mathbf{111\,011\,101\,111\,011\,101}.$$

Truncamento direto:

$$G' = \begin{bmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_0 & G_1 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_0 & G_1 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_0 & G_1 & G_2 \end{bmatrix}, \quad v = \mathbf{111\,011\,101\,111}.$$

Tail-biting:

$$G' = \begin{bmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_0 & G_1 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_0 & G_1 & G_2 & 0 \\ G_2 & 0 & 0 & G_0 & G_1 & G_2 \end{bmatrix}, \quad v = \mathbf{100\,110\,001\,111}.$$

(b) Estado zero: $u(D)G(D) = [1 + D^2 + D^3 \quad 1 + D + D^2 + D^3 \quad 1 + D + D^2 + D^3]$.
Truncamento direto: $u(D)G(D) \bmod D^4 = [1 + D^2 + D^3 \quad 1 + D + D^2 + D^3 \quad 1 + D + D^2 + D^3]$.
Tail-biting: $u(D)G(D) \bmod (D^4 + 1) = [1 + D + D^3 + D^4 \quad D + D^2 \quad D^2 + D^3]$.
(c) Estado zero: $d = 7$.
Truncamento direto: $d = 3$.
Tail-biting: $d = 4$.